دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق

عنوان

برهان‌های استاندارد قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور

دکتر هژیر حومئی

پژوهشگر

شیوا خالقی

زمستان ۱۳۹۵

بسم الله الرّحمن الرّحیم

ای دوست قبولم کن و جانم بستان — مستم کن و از هردو جهانم بستان
با هرچه دلم قرار گیرد بی تو — آتش به من اندر زن و آنم بستان

****

ای زندگی تن و توانم همه تو — جانی و دلی ای دل و جانم همه تو
تو هستی من شدی از آنی همه من — من نیست شدم در تو از آنم همه تو

****

در عشق توام نصیحت و پند چه سود — زهرآب چشیده‌ام مرا قند چه سود
گویند مرا که بند بر پاش نهید — دیوانه دل است پام بر بند چه سود

****

من درد تو را ز دست آسان ندهم — دل بر نکنم ز دوست تا جان ندهم
از دوست به یادگار دردی دارم — کان درد به صد هزار درمان ندهم

مولانا

تقدیم به:

اسطوره های همیشه جاودان زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم

«خانواده عزیزم»

آنان که تلاش و کوشش را با همتی بی دریغ بر گستره ای از عشق ره توشه ام ساختند،
تا به من بیاموزند شایسته زیستن را...

بنام خدا

و لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق.

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله، آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم ومعرفت بیازماید. خداوندی را که هرچه دارم از اوست، به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم. خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، استادانی فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. کسانیکه بودنشان تاج افتخاری است بر سرم... متواضعانه و خالصانه تشکر می‌کنم از جناب آقای دکتر **سعید صالحی پورمهر** استاد راهنمای گرانمایه‌ام که در کمال سعه صدر، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفته‌اند؛ استاد با کمالات و شایسته‌ای که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای دوران تحصیلم را مدیون حضور سبز ایشان هستم.

تشکر می‌کنم از جناب آقای دکتر **هژیر حومئی** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند.

از سرکار خانم دکتر **سمیه تاری** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

از اساتید گرامی و کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحماتی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

ادای احترام و تشکر از عزیزان زندگی‌ام پدر و مادر و خواهر وبرادرم که دعای خیر و حمایتشان همواره با من بوده و هست و همچنین تشکر و قدردانی می‌کنم از همراهی و کمک‌های جناب آقای مهندس میلاد احمدی که در تمام دوران تحصیلم حمایت خود را از بنده دریغ ننموده‌اند.

خداوندا به ما توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، مناعت بی غرور، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، را عنایت فرما...

شیوا خالقی

زمستان ۱۳۹۵

نام خانوادگی دانشجو: خالقی   نام: شیوا
عنوان: برهان‌های استاندارد قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل
استاد راهنما : دکتر سعید صالحی پورمهر استاد مشاور : دکتر هژیر حومئی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: منطق   دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: زمستان ۱۳۹۵   تعداد صفحات: ۵۳
کلید واژه‌ها: ناتمامیت، سازگاری، قطری سازی، اثبات‌پذیری، حساب، خودنامصداقی.

چکیده

این پایان‌نامه شامل چندین برهان مختلف قضیه دوم ناتمامیت گودل است. در فصل اول، برهانی استاندارد برای این قضیه به بیان باگاریا از مقاله [۱] زیر آورده شده است. فصل دوم، شرایط اثبات‌پذیری هیلبرت و برنی را از مقاله [۴] زیر بررسی می‌کند. بالاخره در فصل سوم و آخرین، برهان یِخ از [۳] و برهان چِشلینسکی از [۲] که بر پایه پارادوکس گرِلینگ می‌باشد آورده شده است. پس این پایان‌نامه بر اساس مقالات زیر است:

[1] J. Bagaria, A Short Guide to Gödel's Second Incompleteness Theorem, *Teorema: Revista Internacional de Filosofía* 22 (2003) 5–15.

[2] C. Cieśliński, Heterologicality and Incompleteness, *Mathematical Logic Quarterly* 48 (2002) 105–110.

[3] T. Jech On Gödel's Second Incompleteness Theorem, *Proceeding of the American Mathematical Society* 121 (1994) 311–313.

[4] R. Jerleslow, Redundancies in the Hilbert-Bernays Derivability Conditions for Gödel's Second Incompleteness Theorem, *The Journal of Symbolic Logic* 38 (1973) 359–367.

فهرست مطالب

مقدمه ۳

۱ معرفی قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل ۵

۱.۱ مقدمه ۶

۲.۱ مواد لازم اصلی در اثبات قضایای ناتمامیت ۷

۳.۱ برهان‌های کوتاه ۱۶

۱.۳.۱ اصل موضوع تصریح ۱۶

۲ شرایط مازاد اثبات پذیری هیلبرت ـ برنی ۲۰

۱.۲ مقدمه ۲۱

۱.۱.۲ شرایط اثبات‌پذیری هیلبرت ـ برنی ۲۱

۲.۲ تعریف‌ها و ابزارهای لازم ۲۲

۳.۲ نتایج مقدماتی ۲۴

۴.۲ نتایج اصلی ۲۷

۵.۲ نگاهی به سازگاری ۳۰

۳ دو برهان دیگر برای قضیه‌ی دوم ناتمامیت ۳۳

۱.۳ خودنامصداقی و ناتمامیت ۳۶

۱.۱.۳ پارادوکس گرلینگ ۳۷

۲.۳ ناتمامیت نظریه مجموعه‌ها ۳۷

۳.۳ ناتمامیت حساب پئانو ۴۳

مراجع ۴۵

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۴۷

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۵۰

مقدمه

کورت گودل (۱۹۰۶–۱۹۷۸)، از مشاهیر منطق و ریاضیات در قرن بیستم، با اثبات قضایای معروف ناتمامیت اول و دوم تأثیرات شگرفی در ریاضیات و منطق بر جای گذاشت. اما دامنه‌ی تأثیرات قضایای گودل محدود به حوزه ریاضیات و منطق نماند، بلکه گستره‌های مختلف فلسفی، بویژه برخی از فلسفه‌های مضاف از جمله فلسفه ذهن و فلسفه ریاضیات را تحت تأثیر خود قرار داده و حتی دامنه کاربرد خود را تا برخی نظریه‌های فلسفی مطلق در حوزه متافیزیک برگشود. امروزه در غرب کمتر کتاب کلاسیک فلسفه را می‌توان یافت که نامی از گودل و نتایج شگرف فلسفی کارهای او به میان نیاورده باشد.

مناسب است که در ابتدا اشاره‌ای به محتوای قضایای اول و دوم ناتمامیت گودل داشته باشیم. ارایه بیانی غیر ریاضی و غیر نمادی از محتوا و روش اثبات قضایای ناتمامیت گودل، به وجهی که برای همه‌ی علاقه مندان فلسفه قابل استفاده باشد، کار بسیار دشواری است. به موجب ناتمامیت گودل هر سیستم صوری اصل موضوعی حساب، که به اندازه کافی قوی باشد، (تحت بعضی شرایط) باید مشتمل بر گزاره‌ای تصمیم ناپذیر باشد، یعنی گزاره‌ای که خود آن و نقیض آن هیچکدام قابل اثبات نیست.

سیستم‌های منطقی تمام، برای هر جمله P از زبان‌شان، ناگزیر از اثبات P یا نقیض P هستند. در قضیه اول ناتمامیت، گودل اثبات می‌کند که سیستم‌های محقق به این معنی تمام نیستند. در واقع جملاتی از حساب مقدماتی وجود دارند که سیستم‌ها، نه می‌توانند آن‌ها را اثبات کنند و نه می‌توانند آن‌ها را رد کنند،در حالی که سازگاری آن‌ها اثبات شده است.

بنابراین بخشی از حقایق حساب قابل اصل موضوعی کردن به شکل صوری نیست. فرض کنید

سیستم معین S شرایط زیر را داشته باشد:

۱ ــ قدرت کافی برای اثبات هر جمله در زبان خود داشته باشد به قسمی که اگر آن را اثبات می‌کند، آنگاه اثبات کند که آن را اثبات می‌کند.

۲ ــ قادر به بیان جمله معین G (جمله خودارجاع گودل)، که عبارتست از: «G در S اثبات‌پذیر نیست»، باشد.

تحت این شرایط، S مادامی که سازگار باشد نمی‌تواند G را اثبات کند. زیرا با فرض اینکه S بتواند G را اثبات کند، به واسطه (۱) اثبات می‌شود که «G در S قابل اثبات است» و به واسطه (۲) اثبات می‌شود که «G در S قابل اثبات نیست». بنابرای، S ناسازگار خواهد بود. بیان فنی‌تر برهان اول ناتمامیت به صورت زیر می‌باشد:

فرض کنید S فقط جملات درست را اثبات می‌کند و جمله G می‌گوید که G در S قابل اثبات نیست. بنابراین نه G و نه نقیض G در S قابل اثبات نخواهند بود، زیرا اگر G درست باشد، آنگاه در S قابل اثبات نیست، و اگر G نادرست باشد، باز هم قابل اثبات در S نیست، چرا که S فقط جملات درست را اثبات می‌کند. بنابراین G در S قابل اثبات نیست، و از این رو G درست است. بنابراین نقیض G نادرست است و لذا در S قابل اثبات نیست، چون S فقط جملات درست را اثبات می‌کند.

قضیه اول ناتمامیت گودل عبارت است از اینکه: «برای هر سیستم صوری، که در آن حقایق مربوط به علم حساب قابل اثبات باشند، ساختن یک گزاره مربوط به علم حساب، به قسمی که با فرض سازگاری نظریه مزبور درست باشد، و در نظریه مورد نظر قابل اثبات یا انکار نباشد، ممکن است.» و قضیه دوم ناتمامیت، حاوی این ادعاست که: «اگر یک سیستم سازگار باشد، نمی‌تواند سازگاری خودش را اثبات کند.» [۲۲]

فصل ۱

معرفی قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل

چکیده

برهان‌های معمول قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل برای نظریه‌های ضعیف مانند $I\Sigma_1$ طولانی و از نظر فنی پیچیده‌اند. جزئیات به ندرت ارایه شده و در خیلی از موارد با بیان جملات مبهمی که به توانایی خواننده برای درک کامل آن‌ها اتکا می‌شود، کاملاً حذف می‌شوند. در ابتدا ما راهنمایی‌هایی برای نکات فنی اصلی معمول قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل در نظریه‌های ضعیف ارایه می‌کنیم. بعداً، اثبات جدید و ساده‌تری را برای این قضیه در نظریه مجموعه‌های زرملو_فرانکل که ازآنِ یِخ است (و در فصل ۳ با تفصیل بیشتری بیان شده است) ارایه کرده و مشاهده می‌کنیم که این برهان می‌تواند به نظریه‌های ضعیف‌تر نیز تعمیم داده شود. در این برهان‌ها از خیلی از پیچیدگی‌های فنی که در برهان‌های معمول مورد نیاز هستند اجتناب می‌کنیم.

۱.۱ مقدمه

اهمیت قضایای ناتمامیت گودل هم برای منطق و هم بنیاد ریاضیات بر کسی پوشیده نیست. آنها نه تنها ناممکن بودن برنامه هیلبرت را در صورت اصلی آن نشان داده‌اند، همینطور تا ابدیت نقش منطق در ریاضیات را عوض کردند؛ لازم به ذکر نیست که بحث‌های بی پایانی تا به امروز درباره اهمیت فلسفی این قضایا وجود دارند. این قضایا می‌توانند به صورت غیر صوری زیر بیان شوند:

قضیه ۱.۱.۱. *(قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل)*
قرار دهید T نظریه‌ی اصل پذیر باشد که قسمت کوچکی از حساب را دربر دارد. آنگاه جمله‌ای مانند θ وجود دارد به طوری که اگر T سازگار باشد، آنگاه T، θ را اثبات نمی‌کند، و اگر T شرط سازگاری دیگری را ارضا کند، آنگاه T نقیض θ را هم اثبات نمی‌کند.

قضیه ۲.۱.۱. *(قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل)*
قرار دهید T نظریه‌ی اصل پذیر باشد که قسمت کوچکی از حساب را دربر دارد. اگر T سازگار باشد، آنگاه T ، سازگاری T را اثبات نمی‌کند.

برای نظریه‌های معمول مرتبه‌ـ اول حساب و نظریه مجموعه‌ها، قضیه اول نتیجه‌ای ساده از قضیه دوم است. در اینجا ما روی قضیه‌ی دوم ناتمامیت متمرکز خواهیم بود. ابتدا راهنمایی‌هایی برای نکات فنی اصلی برهان‌های معمول قضیه دوم گودل در نظریه‌های ضعیف ارایه می‌کنیم؛ هدف ما ارایه تقریباً بهینه آن خواهد بود. سپس ما برهانی کوتاه برای قضیه از یِخ [۹] در نظریه مجموعه زرملوـ فرانکل را ارایه می‌کنیم. در نهایت نشان می‌دهیم که چگونه برهان یِخ می‌تواند برای نظریه‌های ضعیف مانند حساب پئانو و یا $I\Sigma_1$ گسترش داده شود، با توجه به اینکه $I\Sigma_1$ یکی از ضعیف‌ترین نظریه‌هایی است که این قضیه برای آن برقرار است. این برهان‌ها از خیلی از پیچیدگی‌های فنی که برای برهان‌های معمول قضیه ناتمامیت لازم‌اند دوری می‌جویند.

۲.۱ مواد لازم اصلی در اثبات قضایای ناتمامیت

تعریف ۱.۲.۱. تعریف می‌کنیم:

- $\mathsf{proof}_T(x,y)$: x اثباتی از y است
- $\mathsf{prov}_T(z) \equiv \exists x \mathsf{proof}_T(x,z)$

مواد لازم اصلی در اثبات معمول قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل برای یک نظریه داده شده T (در یک زبان شامل حساب) به شرح زیر هستند:

- حسابی سازی بازگشتی از نحو زبان T.
- Σ_1ـ تعریف‌پذیری محمولات شمارای بازگشتی.
- اثبات‌پذیری Σ_1ـ جملات زبان حساب در T.
- قطری سازی.
- اثبات‌پذیری برخی ویژگی‌های محمول اثبات‌پذیری prov_T در T.

مواد اصلی اولیه همچنین در اثبات قضیه‌ی اول ناتمامیت هم ظاهر می‌شوند. پنج‌امین ماده، که مشکل‌تر اثبات می‌شود، گام اساسی است که صورتی قوی‌تر از قضیه دوم ناتمامیت را ثابت می‌کند.

I. حسابی سازی بازگشتی از نحو زبان T

برای یک زبان شمارای صوری داده شده‌ی $\mathcal{L}$، می‌توانیم نمادها را با اعداد طبیعی مشخص کرده و به طریق بازگشتی (مقدماتی) نحو $\mathcal{L}$ را رمزنگاری نماییم. این امر امکان‌پذیر است چون که مفاهیم نحوی مانند فرمول‌هابه طور بازگشتی تعریف می‌شوند. روش رمزنگاری می‌تواند دلخواه باشد، مادامی که بازگشتی باشد. پس اگر مجموعه‌ی نمادها با مجموعه‌ای بازگشتی از اعداد طبیعی متناظر شود، آنگاه مجموعه‌ی کدهای ترم‌ها، فرمول‌ها و برهان‌ها نیز چنین خواهند بود (با مجموعه‌ای بازگشتی از اعداد طبیعی متناظر می‌شوند). ما همچنین به یک رابطه‌ی سه‌تایی sb نیاز داریم که شامل همه‌ی $\langle x, y, z\rangle$هایی است که z رمز نتیجه‌ی جایگذاری تنها متغیر فرمول رمزنگاری شده x توسط ترم رمزنگاری شده‌ی y بوده و بازگشتی نیز باشد.

نکته اصلی این است که اگر T مجموعه‌ای شمارای بازگشتی از فرمول‌های $\mathcal{L}$ باشد (یعنی مجموعه‌ی کدهای فرمول‌های T شمارای بازگشتی باشد)، آنگاه محمول اثبات‌پذیری prov_T (تعریف ۱.۲.۱)، شامل رمزهای تمامی قضایای T نیز مجموعه‌ای شمارای بازگشتی است.

II. Σ_1ــ تعریف‌پذیری محمولات شمارای بازگشتی

زبان حساب شامل دو نماد تابعی دوتایی $+$ و $\cdot$، یک نماد تابعی یکتایی S و یک نماد ثابت 0 است. رابطه‌ی ترتیب $\leq$ با

$$x \leq y \quad \text{اگروتنهااگر} \quad \exists z(x+z=y)$$

تعریف می‌شود.

یک Σ_1ــ فرمول (در زبان حساب) فرمولی به شکل زیر است:

$$\exists x \varphi(x, y_1, ..., y_k)$$

که $\varphi(x, y_1, ..., y_k)$ یک فرمول کران‌دار است، یعنی فرمولی که سورهای آن همه کران‌دارند، به عبارت دیگر، همگی به شکل $\exists y \leq z$ یا $\forall y \leq z$ هستند.

هر مجموعه‌ی بازگشتی شمارا از اعداد طبیعی در مدل استاندارد نظریه اعداد طبیعی $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle$، Σ_1ـ تعریف‌پذیر است. به ویژه، Σ_1ـ فرمول‌های $\mathsf{sb}(x, y, z)$ و $\mathsf{prov}_T(x)$ (تعریف ۱.۲.۱) وجود دارند که رابطه‌ی جایگزینی sb و محمول اثبات‌پذیری prov_T را تعریف می‌کنند.

III. اثبات‌پذیری Σ_1ـ جملات زبان حساب در T

ترم $\bar{n}$ برابر است با $\underbrace{SSSS...0}_{n \text{ بار}}$ که نمایانگر عدد n است.

تعریف ۲.۲.۱. (**معرفی** R_0): قسمت زیر از حساب R_0 نامیده شده و با چهار گروه نامتناهی از اصول زیر تعریف می‌شود:

۱. $\bar{n} + \bar{m} = \bar{p}$، برای هر $m, n, p \in \mathbb{N}$ به طوری که $m + n = p$.

۲. $\bar{n} \cdot \bar{m} = \bar{p}$، برای هر $m, n, p \in \mathbb{N}$ به طوری که $m \cdot n = p$.

۳. $\bar{n} \neq \bar{m}$، برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ به طوری که $m \neq n$.

۴. و بستار عمومی فرمول‌هایی که به شکل زیر هستند (برای هر $n \in \mathbb{N}$):

$$x \leq \bar{n} \longrightarrow (x = \bar{0} \vee x = \bar{1} \vee ... \vee x = \bar{n})،$$

R_0 ویژگی مهم زیر را دارد:

از آنجا که هر مدل M از سه گروه اول از اصول، دیاگرام $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle$ را ارضا می‌کند (ر.ک. صفحه ۱۲۷ از [۱۷])، از این رو همه‌ی جملات بدون سور قطعاً بین M و $\mathbb{N}$ یکی هستند. گروه چهارم از اصول تضمین می‌کند که هر جمله در در زبان حساب تنها با سورهای کران‌دار R_0 هم ارز با یک جمله‌ی بدون سور است. از این رو، همه‌ی Σ_1ـ جملاتی که در $\mathbb{N}$ برقرار باشند در M نیز برقرارند. به راحتی بررسی می‌شود که R_0 ضعیف‌ترین قسمت حساب است که این ویژگی را دارد.

ویژگی زیر از محمول اثبات‌پذیری prov_T نقش تعیین کننده‌ای در اثبات قضیه‌ی ناتمامیت ایفا می‌کند: چون هر Σ_1ــ جمله‌ی درست در T اثبات‌پذیر است، برای همه‌ی فرمول‌های φ داریم،

$$T \vdash \varphi \Longrightarrow T \vdash \mathsf{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \qquad (۱.۱)$$

که $\ulcorner\varphi\urcorner$ عدد گودلی φ است، یعنی اگر n کد φ باشد، آنگاه $\ulcorner\varphi\urcorner = \bar{n}$.

IV. قطری سازی

اگر a یک ترم یا فرمول باشد، فرض کنید $\ulcorner a\urcorner$ کد a را مشخص کند.

قضیه ۱.۲.۳. (*قضیه‌ی قطری سازی گودل*)

فرض کنید T نظریه‌ای باشد که شامل R_0 (تعریف ۱. ۲. ۲) است. آنگاه برای هر فرمول $\varphi(x)$، که x تنها متغیر آزاد است، یک جمله‌ی θ وجود دارد به طوری که

$$.T \vdash \theta \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\theta\urcorner)$$

برهان. طبق نمایش‌پذیری روابط بازگشتی در R_0 ([۱۷])، چون sb بازگشتی است، اگر $\mathsf{sb}(m, n, p)$ آنگاه

$$.T \vdash \forall z\big(\mathsf{sb}(\bar{m}, \bar{n}, z) \leftrightarrow z = \bar{p}\big) \qquad (۲.۱)$$

قرار دهید:

$$.n = \ulcorner\forall z\big(\mathsf{sb}(x, \ulcorner x\urcorner, z) \to \varphi(z)\big)\urcorner$$

فرض کنید θ جمله‌ی زیر باشد

$$.\forall z\big(\mathsf{sb}(\bar{n}, \ulcorner\bar{n}\urcorner, z) \to \varphi(z)\big)$$

توجه کنید که $\mathsf{sb}(n, [\bar{n}], [\theta])$ برقرار است.

طبق (۲.۱)

$$.T \vdash \mathsf{sb}(\bar{n}, \ulcorner \bar{n} \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner)$$

به روشنی،

$$.\vdash \Big(\theta \rightarrow \big(\mathsf{sb}(\bar{n}, \ulcorner \bar{n} \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner) \rightarrow \varphi(\ulcorner \theta \urcorner)\big)\Big)$$

از این رو،

$$T \vdash \theta \rightarrow \varphi(\ulcorner \theta \urcorner)$$

از طرف دیگر، از آنجا که $T \vdash \mathsf{sb}(\bar{n}, \ulcorner \bar{n} \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner)$، داریم

$$T \vdash \Big(\varphi(\ulcorner \theta \urcorner) \rightarrow \forall z \big(\mathsf{sb}(\bar{n}, \ulcorner \bar{n} \urcorner, z) \rightarrow \varphi(z)\big)\Big)$$

پس $.T \vdash \varphi(\ulcorner \theta \urcorner) \rightarrow \theta$ ⊠

برای اثبات هردو قضایای ناتمامیت، در حالتی خاص به قضیه‌ی قطری سازی، یعنی فرمول $\neg\mathsf{prov}_T(\ulcorner x \urcorner)$، نیاز داریم.

V. اثبات‌پذیری برخی ویژگی‌های محمول اثبات‌پذیری در T

اصول موضوع حساب پئانو ($\boldsymbol{PA}$)

(1) $(\forall x)(\forall y)\big(S(x) = S(y) \rightarrow x = y\big)$

(2) $(\forall x)\big(S(x) \neq 0\big)$

(3) $(\forall x)\big(x + 0 = x\big)$

(4) $(\forall x)\big(x + S(y) = S(x + y)\big)$

(5) $(\forall x)(\forall y)\big(x \times S(y) = x \times y + x\big)$

(6) $(\forall x)\big(x \times 1 = x\big)$

(7) $(\forall x)[\varphi(x) \rightarrow \varphi\big(S(x)\big)] \longrightarrow [\varphi(0) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)]$

از میان ویژگی‌های محمول اثبات‌پذیری prov_T، دو ویژگی زیر برای اثبات قضیه‌ی دوم ناتمامیت مناسب هستند:

برای هر فرمول φ و ψ،

$$\mathsf{prov}_T(\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner)\to[\mathsf{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\to\mathsf{prov}_T(\ulcorner\psi\urcorner)] \quad (۳.۱)$$

.

$$\mathsf{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\to\mathsf{prov}_T\big(\ulcorner\mathsf{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner\big) \quad (۴.۱)$$

.

(۳.۱) تا وقتی که MP (وضع مقدم) را به عنوان قانون استنتاج داریم درست است. برای (۴.۱) همچنین، تا وقتی که Σ_1ـ جملات درست در T اثبات‌پذیر باشند، درست است. برای اثبات قضیه‌ی دوم ناتمامیت لازم است که هردو ویژگی (۳.۱) و (۴.۱) در T اثبات‌پذیر باشند. این در هر نظریه‌ای برقرار نمی‌شود، زیرا که پیچیدگی (۳.۱) و (۴.۱) بزرگ‌تر از Σ_1 است (Δ_2 است یعنی هم Σ_2 و هم Π_2). تا اینجا، هر نظریه‌ی بازگشتی T که شامل R_0(۲.۲.۱) باشد کافی بود. اما برای اثبات (۳.۱) و (۴.۱) در T، R_0 کافی نیست. آنچه لازم داریم قسمتی از حساب پئانو شناخته شده به عنوان Σ_1−استقرا ($I\Sigma_1$) است. این، $\boldsymbol{PA}$ با اصل استقرای محدود به Σ_1ـ فرمول است. برای نشان دادن اینکه $I\Sigma_1$، (۳.۱) و (۴.۱) فوق را ثابت می‌کند، نیازمند بخش‌های بیشتری هستیم.

فرض می‌کنیم T شامل $I\Sigma_1$ باشد و رابطه‌ی دوتایی $\mathsf{proof}_T(x,y)$ را در نظر می‌گیریم:

x یک اثبات T از y است.

اگر T بازگشتی مقدماتی باشد، آنگاه این رابطه‌ای بازگشتی مقدماتی تعریف شده از توابع و روابط بازگشتی است. با به کار بردن تابع گودل β، که بازگشتی مقدماتی بوده و به ما اجازه‌ی رمزنگاری دنباله‌های متناهی را می‌دهد، می‌توان نشان داد که هر رابطه‌ای که به طور بازگشتی مقدماتی از روابط و توابع بازگشتی تعریف می‌شود، بازگشتی هست؛ بنابراین تعریفی

توسط یک Σ_1ـ فرمول دارد. قرار دهید $\mathsf{proof}_T(x,y)$، Σ_1ـ فرمولی باشد که رابطه‌ی برهان را تعریف می‌کند. از تعریف $\mathsf{proof}_T(x,y)$ داریم که برای هر فرمول φ و ψ،

$$\mathsf{proof}_T(x,\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathsf{proof}_T(y,\ulcorner\varphi\rightarrow\psi\urcorner) \rightarrow \mathsf{proof}_T(x*y*\ulcorner\psi\urcorner,\ulcorner\psi\urcorner)$$

جایی که $x*y*\ulcorner\psi\urcorner$ رمز برهان به دست آمده از الحاق برهان رمزنگاری شده x به دنبال برهان رمزنگاری شده y، به دنبال ψ است. لازم است نشان دهیم که فرمول بالا در T اثبات‌پذیر است. فرض می‌کنیم M مدلی از T باشد، فرمول بالا در M برقرار خواهد بود به شرطی که رابطه دوتایی تعریف شده در M توسط فرمول $\mathsf{proof}_T(x,y)$ همان تعریف بازگشتی مقدماتی را که در $\mathbb{N}$ ارضا کرد ارضا کند. این شرط محقق خواهد شد به شرطی که تابع β به آن گونه که در M تعریف شده است همان خواص موجود در $\mathbb{N}$ را داشته باشد، یعنی دنباله‌های متناهی را رمزنگاری کند. نکته اساسی این است که تابع β این خاصیت را دارد که برای هر $a\in M$ و هر دنباله f با طول a، $c,z\in M$ وجود دارند به طوری که برای هر $i<a$ داریم

$$.f(i)=\beta(c,z,i)$$

به طور قطع این به سادگی حاصل نمی‌شود. چون ممکن است a نااستاندارد بوده، پس دنباله با طول a نامتناهی باشد. خوشبختانه ما فقط نیاز داریم دنباله‌های fی را که در M، Σ_1ـ تعریف‌پذیر هستند بررسی کنیم، پس $I\Sigma_1$ کافی خواهد بود. این نکته ظریفی است چون ما می‌توانیم قسمتی از حساب را در درون $I\Sigma_1$ به دست بیاوریم: اصل کوچکترین عدد برای فرمول‌های Σ_1، وجود کوچکترین مضرب مشترک هر دو عضو M، قضیه‌ی باقی مانده چینی و... . با تمام این تفاصیل، بنابراین می‌توانیم نشان دهیم که ویژگی $\mathsf{proof}_T(x,y)$ نمایش داده شده فوق در M برقرار است، از این رو داریم:

$$.T\vdash \mathsf{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\wedge\mathsf{prov}_T(\ulcorner\varphi\rightarrow\psi\urcorner)\rightarrow\mathsf{prov}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \qquad (۳.۱)$$

برای اثبات (۴.۱) در T، می‌توان دید که یک (Σ_1-)فرمول $\mathsf{Tr}_1(x)$ وجود دارد، به طوری که

برای هر Σ_1ـ جمله‌ی ψ،

$$T \vdash \mathsf{Tr}_1(\ulcorner\psi\urcorner) \leftrightarrow \psi \qquad (۵.۱)$$

$\mathsf{Tr}_1(x)$ یک محمول درستی برای Σ_1ـ جملات است، اگرچه طولانی است، می‌تواند توسط رمزنگاری ترم‌ها و فرمول‌ها (با تعاریف معمول بازگشتی) نوشته شود. علاوه بر این، T قضیه‌ی تمامیت برای Σ_1ـ جملات را اثبات می‌کند. به عبارت دیگر، برای هر Σ_1ـ جمله‌ی ψ داریم،

$$T \vdash \mathsf{Tr}_1(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow \mathsf{prov}_T(\ulcorner\psi\urcorner). \qquad (۶.۱)$$

درواقع، با اعمال Σ_1ـ استقرا روی Σ_1ـ فرمول (با متغیر ψ)

$$\mathsf{Tr}_0(\psi) \rightarrow \mathsf{prov}_T(\psi) \wedge \psi \text{ یک جمله‌ی کران‌دار است،}$$

که $\mathsf{Tr}_0(x)$ محمول درستی برای جملات کران‌دار است، به دست می‌آوریم

$$\forall\psi \in \Delta_0\big(\text{ یک جمله‌ی کران‌دار است } \psi \wedge \mathsf{Tr}_0(\psi) \rightarrow \mathsf{prov}_T(\psi)\ \big). \qquad (\star)$$

از این رو

$$\forall\varphi\big(\text{جمله است}\Sigma_1 \text{ یک } \varphi \wedge \mathsf{Tr}_1(\varphi) \rightarrow \mathsf{prov}_T(\varphi)\ \big)$$

اگر M یک مدل از T باشد و $M \models \varphi \equiv \exists x\psi(x)$، $\psi(x)$ کران‌دار و $\mathsf{Tr}_1(\varphi)$، آنگاه $M \models \varphi$، و بنابرین برای یک $a \in M$، $M \models \psi(a)$. پس از $(\star)$ داریم

$$M \models \mathsf{prov}_T\big(\psi(\bar{a})\big)،$$

که از $\varphi \equiv \exists x\psi(x) \rightarrow \psi(\bar{a})$ و $\mathsf{prov}_T(\varphi) \rightarrow \mathsf{prov}_T\big(\psi(\bar{a})\big)$ نتیجه می‌دهد

$$M \models \mathsf{prov}_T(\varphi).$$

پس (۵.۱) و (۶.۱) فوق نتیجه می‌دهند

$$T \vdash \Big(\mathsf{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathsf{prov}_T\big(\ulcorner \mathsf{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner\big)\Big) \tag{۴.۱}$$

حال همه‌ی عناصر در جای خود هستند و می‌توانیم قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل را ثابت کنیم.

برهان. برهان قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل (۲.۱.۱):
طبق قطری سازی (۳.۲.۱)، فرض کنید θ چنان باشد که $T \vdash \neg\mathsf{prov}_T(\ulcorner\theta\urcorner) \leftrightarrow \theta$. طبق (۱.۱)، $T \vdash \mathsf{prov}_T\big(\ulcorner \mathsf{prov}_T(\ulcorner\theta\urcorner) \rightarrow \neg\theta\urcorner\big)$. از این رو طبق (۳.۱) و (۴.۱) داریم

$$T \vdash \mathsf{prov}_T(\ulcorner\theta\urcorner) \rightarrow \mathsf{prov}_T(\ulcorner\neg\theta\urcorner)$$

طبق (۱.۱)، $T \vdash \mathsf{prov}_T\big(\ulcorner(\theta \wedge \neg\theta) \rightarrow \perp\urcorner\big)$، که $\perp$ هر جمله‌ی نادرستی است، برای مثال، $0 \neq 0$. بنابراین، طبق (۳.۱)

$$T \vdash \mathsf{prov}_T(\ulcorner\theta\urcorner) \rightarrow \mathsf{prov}_T(\ulcorner\perp\urcorner)$$

فرض کنید $\mathsf{con}(T)$ جمله‌ی $\neg\mathsf{prov}_T(\ulcorner\perp\urcorner)$ باشد. پس $\mathsf{con}(T)$ (طبق رمزنگاری) بیان می‌کند که T سازگار است. پس داریم:

$$T \vdash \mathsf{con}(T) \rightarrow \theta.$$

نتیجه می‌گیریم که $T \nvdash \mathsf{con}(T)$، چون اگر $T \vdash \mathsf{con}(T)$، آنگاه $T \vdash \theta$ و بنابراین، طبق (۱.۱)، $T \vdash \mathsf{prov}_T(\ulcorner\theta\urcorner)$ پس $T \vdash \neg\theta$ و بنابراین T سازگار است. ☒

قضیه ۴.۲.۱. *(قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل)*
فرض کنید T یک نظریه بازگشتی باشد که شامل $I\Sigma_1$ است. اگر T سازگار باشد، آنگاه

$$.T \nvdash \mathsf{con}(T)$$

قضیه همچنین برای نظریه‌های بازگشتی T در هر زبانی درست است، لازم نیست که شامل زبان حساب باشد. آنچه نیاز است این است که $I\Sigma_1$ در T قابل تعبیر باشد. یعنی اینکه به طور کلی، فرمول‌هایی در زبان T موجود باشند که در T، مدلی از $I\Sigma_1$ تعریف شوند. سپس ممکن است به زبان T نمادهای زبان حساب و فرمول‌هایی را برای تعریف این نمادها اضافه کنیم، پس این T جدید در زبان توسعه یافته، که آن را T' می‌نامند، همه‌ی اصول $I\Sigma_1$ را ارضا می‌کند. پس

$$.T' \nvdash \mathsf{con}(T')$$

اما از آنجا که همه‌ی نمادهای جدید در T تعریف‌پذیرند، نتیجه می‌گیریم که

$$.T \nvdash \mathsf{con}(T)$$

یک مثال مهم نظریه مجموعه‌ی زرملو_ فرانکل (ZF) و گسترش‌های آن است. در ZF ممکن است مدلی را تعریف کنیم که در جهان آن اوردینال‌های متناهی دارد، $+$ و $\cdot$ جمع و ضرب معمولی اوردینال‌های متناهی هستند، S تابعی است که هر اوردینال متناهی α را به $\alpha \cup \{\alpha\}$ می‌برد، و 0 مجموعه‌ای خالیست. در ZF می‌توان $\boldsymbol{PA}$ را تعبیر کرد. بنابراین، اگر T یک نظریه بازگشتی شامل ZF باشد، آنگاه

$$.T \nvdash \mathsf{con}(T)$$

۳.۱ برهان‌های کوتاه

۱.۳.۱ اصل موضوع تصریح

- متناظر با هر مجموعه‌ی A و هر شرط $S(x)$ مجموعه‌ای چون B وجود دارد که اعضای آن دقیقاً همان عناصری از مجموعه‌ی A هستند که در شرط $S(x)$ صدق می‌کنند.

برهان کوتاه بعدی برای قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل را در نظریه مجموعه‌ی زرملو ـ فرانکل ارایه می‌دهیم. برهان با مقدمات بخش قبل است، و در آن نیازی به حسابی‌سازی نحو نداریم.

قضیه ۱.۳.۱. *اگر ZF سازگار باشد، آنگاه* $ZF \nvdash \mathsf{con}(ZF)$.

پیش از اثبات قضیه، توجه کنید که ZF قضیه‌ی ناتمامیت را برای منطق مرتبه اول ثابت می‌کند، از این رو،

$$ZF \vdash \big(\mathsf{con}(ZF) \rightarrow \text{یک مدل دارد } ZF\big)$$

پس برای اثبات قضیه و رسیدن به یک تناقض، فرض می‌کنیم ZF ثابت می‌کند که ZF یک مدل دارد. همچنین فرض می‌کنیم S مجموعه‌ای متناهی از اصول ZF باشد (که برای فهم تعریف «مدل» و «ارضاء کردن» کافیست) که فقط یک نمونه از اصل تصریح را دربر می‌گیرد که در (۸.۱) زیر مورد نیاز خواهد بود، و ثابت می‌کند که ZF یک مدل دارد.
اگر $\langle N, E^M\rangle$ و $\langle N, E^N\rangle$ مدل‌های S باشند، تعریف می‌کنیم: $M < N$ اگر یک $\langle m, E^m\rangle$ موجود باشد به طوری که $E^M = (E^m)^N := \{\langle x, y\rangle : N \models xE^m y\}$. یعنی M آن چیزی باشد که N فکر می‌کند m است.
توجه کنید اگر $M < N$، آنگاه برای هر جمله‌ی σ از زبان نظریه‌ی مجموعه،

$$N \models (m \models \sigma) \text{ اگروتنهااگر } M \models \sigma.$$

همچنین توجه کنید که اگر $M < N$، آنگاه $M \subseteq N$.

(۷.۱) اگر $N \models S$ آنگاه $M < N$ وجود دارد.

برهان. فرض می‌کنیم $N \models S$ ، آنگاه $\langle m, E^m\rangle \in N$ چنان وجود دارد که $M < N$. فرض می‌کنیم $M = m$ و $E^M = (E^m)^N$. آنگاه $M < N$. توجه کنید که $M \models S$. ⊠

(۸.۱) $<$ یک رابطه‌ی تراگذاری است.

برهان. چون اگر m_1 شاهدی بر $M_1 < M_2$ و m_2 شاهدی بر $M_2 < M_3$ باشند، آنگاه چون $E^{m_1}, E^{m_2} \in M_3$ و M_3 نوعی از اصل تصریح را ارضا می‌کند، پس $E \in M_3$ چنان وجود دارد که

$$M_3 \models \forall xy\big(xEy \to (xE^{m_1}y \wedge \langle x, y\rangle E^{m_2}E^{m_1})\big).$$

به راحتی می‌توان دید که $\langle m_1, E\rangle$ شاهدی است بر $M_1 < M_3$. ☒

اگر $\varphi(x)$ یک فرمول با x به عنوان تنها متغیر آزاد باشد، فرض می‌کنیم $C_{\varphi(x)}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی تعریف شده توسط $\varphi(x)$ باشد. قرار دهید

$$D = \{\varphi(x) : \exists M(M \models S \wedge M \models \varphi(x) \notin C_{\varphi(x)})\}$$

فرض می‌کنیم $\theta(x)$ فرمول $\exists M(M \models S \wedge M \models x \notin C_x)$ باشد، پس $C_{\theta(x)} = D$. آنگاه $S \vdash \theta(x) \in D$ اگروتنهااگر

$$\exists M\big(M \models S \wedge M \models \theta(x) \notin D\big).$$

جمله‌ی «$\theta(x) \in D$» نقش جمله‌ی θ را در قضیه‌ی قطری سازی ۳.۲.۱ ایفا می‌کند. پس آن را هم θ می‌نامیم.

(۹.۱) اگر $N \models \theta$، آنگاه $M < N$ وجود دارد به طوری که $M \models \neg\theta$.

برهان. اگر $N \models \theta$، آنگاه $m \in N$ وجود دارد به طوری که $N \models (m \models \neg\theta)$. فرض می‌کنیم $M = m$ و $E^M = (E^m)^N$. آنگاه $M < N$ و M شاهدی بر آن است. بنابراین $M \models \neg\theta$. ⊠

(۱۰.۱) اگر $N \models \neg\theta$ و $M < N$، آنگاه $M \models \theta$.

برهان. قرار دهید m شاهدی بر $M < N$ باشد. اگر $M \models \neg\theta$، آنگاه $N \models (m \models \neg\theta)$. از این رو $N \models \theta$. و این یک تناقض است. ⊠

حال فرض می‌کنیم $M_1 \models S$. اگر $M_1 \models \theta$، طبق (۹.۱) $M_2 < M_1$ وجود دارد به طوری که $M_2 \models \neg\theta$. در غیر اینصورت، قرار می‌دهیم $M_2 = M_1$. طبق (۷.۱) فرض می‌کنیم $M_3 < M_2$. طبق (۱۰.۱) $M_3 \models \theta$. طبق (۹.۱) قرار می‌دهیم $M_4 < M_3$ چنان که $M_4 \models \neg\theta$. اما طبق (۸.۱) $M_4 < M_2$، که با (۱۰.۱) در تناقض است.

فصل ۲

شرایط مازاد اثبات پذیری هیلبرت- برنی

۱.۲ مقدمه

۱.۱.۲ شرایط اثبات‌پذیری هیلبرت_ برنی

برای نظریه T و جملات φ و ψ:

◄ اگر $T \vdash \varphi$ آنگاه $T \vdash \Box\varphi$

◄ $T \vdash \Box(\varphi \to \psi) \longrightarrow (\Box\varphi \to \Box\psi)$

◄ $T \vdash \Box\varphi \longrightarrow \Box\Box\varphi$.

در این فصل، سه تعمیم از قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل [۵] را ارایه می‌دهیم که می‌تواند روی کلاسی گسترده از سیستم‌های صوری تعمیم داده شود [۴]. محتوای هر سه نتیجه این است که نسخه‌های مختلف سومین شرط اثبات پذیری هیلبرت_ برنی (صفحه ۲۸۶ از [۷]) در قضیه‌ی دوم گودل، مهم و تأثیرگذار هستند. شرط دوم اثبات‌پذیری نقش بعضی قوانین خاص در منطق را بازی می‌کند، اما حتی در آنجا، فقط شکل ضعیف‌تری از یک شرط تعریف‌پذیری است (قضیه ۱.۴.۲). حذف اولین شرط اثبات‌پذیری، امکان استفاده از قضیه‌ی سازگاری برای منطق‌هایی را فراهم می‌کند که در آن‌ها قاعده برش برقرار نیست.

قضیه ۲.۳.۲ می‌تواند در خواننده‌ای که توجهی به نظریه برهان فنی یا مبانی ریاضی ندارد، علاقه‌ای اولیه ایجاد کند، بدین خاطر که منطق سورها را به کار می‌برد، و در این حالت می‌توان به طور کامل از شرایط اول و دوم اثبات‌پذیری صرف‌نظر کرد. اثبات این نتایج به یک‌سری «پیچ و تاب‌های جدید» روی استدلال‌های قدیمی نیاز دارد. به ویژه از خوانشی جدید از لم قطری استفاده می‌کنیم (لم ۵.۱ در [۴]) تا ساختار خودارجاع متفاوت‌تری از (لم ۴.۲.۳) به دست آوریم. به وسیله این ساختار جدید، جمله φ را که بیانگر این حقیقت است در نظر می‌گیریم: «نقیض من اثبات‌پذیر است.» بنابراین، با استفاده از فرضیه‌ی مرتبط به قضیه اول ناتمامیت گودل، نشان می‌دهیم که $\vdash \neg\varphi$ در یک منطق سازگار ناممکن است.

درنهایت، تنها با استفاده از یک نسخه از سومین شرط اثبات‌پذیری هیلبرت_ برنی نشان می‌دهیم که اثبات‌پذیری سازگاری، بر $\vdash \neg\varphi$ دلالت دارد، و از این روست که سازگاری اثبات‌ناپذیر است.

در انواع استدلال‌های استاندارد برای نسخه‌های قضیه‌ی دوم اثبات‌ناپذیری گودل، به عنوان مثال در اثبات قضیه‌ی ۵.۶ در [۴]، راهکارهای مختلف زیر به کار می‌روند. توسط لم قطری، یک جمله‌ی λ ساخته شده که بیانگر «من اثبات‌پذیر نیستم» است. سپس با فرض قضیه‌ی اول ناتمامیت، نشان داده می‌شود $\vdash \lambda$ در منطقی سازگار امکان ناپذیر است. درنهایت، نشان داده می‌شود اثبات‌پذیری سازگاری، دلالت دارد بر $\vdash \lambda$، پس سازگاری اثبات‌ناپذیر است؛ اما این استدلال اخیر، در اثبات‌های استاندارد، به همه‌ی سه شرایط اثبات‌پذیری هیلبرت‑ برنی نیاز دارد. قضایای ۱.۴.۲ و ۱.۵.۲ قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل را در منطق خالی از سور مورد بررسی قرار می‌دهند. این نتایج به تنهایی با نوعی از عبارات سازگاری که به برنامه اصلی هیلبرت مربوط می‌شوند سروکار دارد [۸]. ابزارهای مورد نیاز برای اثبات قضایای ۱.۴.۲ و ۱.۵.۲ جملات خودارجاع جدید و پیچیده‌ای هستند.

۲.۲ تعریف‌ها و ابزارهای لازم

حال مفروضات روی نظریه‌ی T را شرح می‌دهیم که معمولاً در منطق هایی دیده می‌شوند که صرفاً برخی نسخه‌های قضیه‌ی اول ناتمامیت در مورد آن‌ها شناخته شده هستند. بنابراین باید شرایط بیشتری را به صراحت در قضایا در جهت به دست آوردن نسخه‌های قضیه‌ی دوم ناتمامیت اضافه کنیم.

فرض می‌کنیم L زبان نظریه T باشد. فرض می‌شود که تناظری یک به یک بین یک مجموعه‌ی D از ترم‌های بسته و شبه ترم‌های بسته از L و مجموعه‌ی همه‌ی ترم‌ها، فرمول‌ها، و دنباله‌های فرمولی وجود دارد. ترم بسته یا شبه‌ترم بسته‌ی $\bar{\alpha}$ را در تناظر با شیٔ α در نظر می‌گیریم؛ همچنین می‌گوییم که $\bar{\alpha}$ رمزنگاری گودلی از α است. در سراسر این پایان‌نامه $\ulcorner \alpha \urcorner$ و $\bar{\alpha}$ به جای هم به کار می‌روند. فرض می‌شود که یک کلاس $\mathbf{F}$ از توابع وجود دارد به طوری که دامنه‌ی هر $f \in \mathbf{F}$ زیر مجموعه ای از حاصل ضرب دکارتی (متناهی) از D است، و $\mathbf{F}$ تحت ترکیب بسته است.

فرض می‌شود که برای هر $f \in \mathbf{F}$ یک فرمول $A_f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ برای گراف f یعنی برای رابطه‌ی $f(x_1, ..., x_n) = x_{n+1}$ وجود دارد. برای سادگی فرض می‌کنیم

$$f(x_1, ..., x_n) = x_{n+1}$$

یک فرمول از زبان است.

در ادامه‌ی توضیح این نمادگذاری، باید مثلا از $z = k\big(g(x,y), h(y)\big)$ استفاده کنیم تا فرمول $m(x,y) = z$ را برای تابع $m(x,y) = k\big(g(x,y), h(y)\big)$ مختصر کنیم، و این تابع نیز در $\mathbf{F}$ است، چون $\mathbf{F}$ تحت ترکیب بسته است. در منطق سورها همچنین باید شبه ترم‌های $f(x_1, \ldots, x_n)$ (که در واقع در اغلب موارد در L موجود نیست) را فراخوانی کنیم. برای یک فرمول $\alpha(x)$ و $f \in \mathbf{F}$، $\alpha\big(f(x)\big)$ بیانگر فرمول زیر

$$(\exists y)\big(\alpha(y) \wedge f(x) = y\big)$$

در منطق سورهاست. منظور از $\alpha\big(f(x)\big)$ در زبان‌های بدون سور واضح است، چون در این موارد تنها ترم‌ها استفاده می‌شوند. در زبان‌های خالی از سور، $\bar{f}$ عدد گودلی ترم برای $f \in \mathbf{F}$ است؛ در سیستم‌های با سور، $\bar{f}$ عدد گودلی برای A_f است. به طور معمول، $\mathbf{F}$ شامل توابع بازگشتی مقدماتی است. موارد زیر درمورد $\mathbf{F}$ فرض می‌شوند:

(F۱) یک تابع $\mathsf{sub} \in \mathbf{F}$ وجود دارد بطوری‌که برای هر فرمول $\alpha = \alpha(x)$ با یک متغیر آزاد x و برای هر $f \in \mathbf{F}$، $\mathsf{sub}(\bar{\alpha}, \bar{f})$ برابر است با: $\ulcorner \alpha\big(f(\bar{f})\big) \urcorner$.

(F۲) یک تابع $\mathsf{neg} \in \mathbf{F}$ وجود دارد به طوری‌که، برای هر فرمول α، $\mathsf{neg}(\bar{\alpha})$ برابر است با: $\ulcorner \neg\alpha \urcorner$.

فرض کنید $\vdash \alpha$ بیان‌گر این باشد که α اثبات‌پذیر در T است.

فرض‌های زیر را در مورد منطق T داریم:

(T۱) برای هر $f \in \mathbf{F}$، اگر $f(a) = b$، آنگاه $\vdash f(a) = b$.

(T۲) اگر $\vdash f(a) = b$، آنگاه برای هر فرمول $\lambda(x)$ از L،

$\vdash \lambda\big(f(a)\big) \iff \vdash \lambda(b)$.

(T۳) قضایای T تحت قوانین زیر بسته هستند (که در آن به هیچ عنوان فرض نمی‌کنیم این قوانین به صراحت قوانین T هستند).

(R۱)

$$\frac{\mathsf{nothing}}{\varphi \to \varphi}$$

(R۲)

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(t)},$$ x یک متغیر آزاد
t هر شبه ترم یا ترم بسته

(R۳)

$$\frac{\varphi \to \lambda, \varphi \to \phi}{\varphi \to \lambda \wedge \phi}$$

(R۴)

$$\frac{\varphi \to \alpha, \neg\alpha}{\neg\varphi}.$$

۳.۲ نتایج مقدماتی

لم زیر، ابزاری جدید برای به دست آوردن جملات خودارجاع فراهم می‌کند.

لم ۱.۳.۲. *برای هر فرمول $\psi(x)$ می‌توان به صورت کارآمد (الگوریتمی) یک فرمول φ و یک ترم (یا شبه‌ترم) بسته t را چنان یافت که عبارات زیر برقرار باشند:*

(۱) *φ برابر است با $\psi(t)$*،

(۲) $\vdash t = \bar{\varphi}$.

برهان. تابع f را به صورت $f(d) = \mathsf{sub}(\ulcorner\psi(x)\urcorner, d)$ برای هر $d \in D$ تعریف می‌کنیم. به وضوح $f \in \mathbf{F}$، و همچنین $f(y)$ برای هر y، یک ترم (یا شبه‌ترم) است. قرار می‌دهیم $t = f(\bar{f})$، و $\varphi = \psi(t)$. پس (۱) بدیهی است و با استفاده از $(F1)$ و $(T1)$ به دست می‌آوریم

$$\vdash f(\bar{f}) = \ulcorner\psi\big(f(\bar{f})\big)\urcorner,$$

که (۲) را نتیجه می‌دهد. ☒

حال می‌توانیم اولین نسخه قضیه‌ی گودل- هیلبرت- برنی را که در منطق سورها کاربرد دارد بیان کنیم.

قضیه ۲.۳.۲. *فرض کنید $\mathsf{prov}_T(u)$ فرمولی در زبان T باشد که دارای شرایط زیر است:*

(۱) *اگر $T \vdash \lambda$، آن‌گاه* $T \vdash \mathsf{prov}_T(\bar{\lambda})$.

(۲) *برای همه‌ی شبه‌ترم های بسته‌ی t،* $T \vdash \mathsf{prov}_T(t) \to \mathsf{prov}_T(\ulcorner \mathsf{prov}_T(t) \urcorner)$.

فرض کنید $\mathsf{con}(T)$ فرمول $\forall u \neg\Big(\mathsf{prov}_T(u) \wedge \mathsf{prov}_T\big(\mathsf{neg}(u)\big)\Big)$ باشد. اگر T سازگار باشد، آنگاه $\mathsf{con}(T)$ در T اثبات‌پذیر نیست.

برهان. معادله‌ی $\psi(x) = \mathsf{prov}_T\big(\mathsf{neg}(x)\big)$ درلم ۱.۳.۲ را در نظر می‌گیریم و φ و t را همان‌ها در لم ۱.۳.۲ قرار می‌دهیم. توسط (R۱) از (T۳) داریم: $\varphi \to \varphi$. طبق لم ۱.۳.۲ داریم:

$$\vdash t = \bar{\varphi}.$$

(T۲) نتیجه می‌دهد که $\vdash \varphi \to \mathsf{prov}_T\big(\mathsf{neg}(\bar{\varphi})\big)$. طبق فرض (۲)، از آن جا که $\mathsf{neg}(t)$ یک شبه‌ترم بسته است، داریم:

$$\vdash \varphi \to \mathsf{prov}_T(\bar{\varphi}).$$

سپس از (R۳) داریم،

$$\vdash \varphi \to \mathsf{prov}_T\big(\mathsf{neg}(\bar{\varphi}) \wedge \mathsf{prov}_T(\bar{\varphi})\big).$$

با توجه به آخرین نتیجه در پاراگراف بالا، برای رسیدن به تناقض فرض می‌کنیم $\vdash \mathsf{con}(T)$. طبق (R۲) از (T۳)

$$\vdash \neg\Big(\mathsf{prov}_T\Big(\bar{\varphi} \wedge \mathsf{prov}_T\big(\mathsf{neg}(\bar{\varphi})\big)\Big)\Big)$$

پس با (R۴) از (T۳) $\vdash \neg\varphi$. یک تناقض را از $\vdash \neg\varphi$ به صورت زیر نتیجه می‌گیریم: با فرض (۱)، داریم $\vdash \mathsf{prov}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)$ پس $\vdash \mathsf{prov}_T\big(\mathsf{neg}(t)\big)$ از آنجا که $\mathsf{neg}(t) = \ulcorner \neg\varphi \urcorner$. بنابراین $\vdash \psi(t)$ پس از لم قبل $\vdash \varphi$، که یک تناقض است، زیرا T سازگار فرض شده است. ☒

تذکر ۳.۳.۲. در صورت لزوم، می‌توان مفهوم انتزاعی از یک « Σ_1^0ــ جمله» را معرفی کرد و سپس (۲) را در قالب طبیعی تر بازنویسی کرد:

$(۲)'$ برای هر Σ_1^0ــ جمله‌ی λ، $\vdash \lambda \to \mathsf{prov}_T(\bar{\lambda})$.

همه‌ی فرض‌های اولیه در بخش (۲.۲) می‌توانند با در نظر گرفتن شکل فرمول‌ها بازنویسی شوند. در واقع ما چنین مطالعه‌ی دقیقی از فرضیات را در بخش (۴.۲) زیر انجام خواهیم داد جاییکه با محمول سازگاری از نوع بدون سور سروکار داریم که این در رابطه مستقیم‌تری با ایده های هیلبرت [۸] در مقایسه با مفهوم con است.

تذکر ۴.۳.۲. با در نظر گرفتن مفروضات بخش (۲.۲) و فرض (۱)، در حقیقت فرض (۲) که صورتی از شرط سوم اثبات‌پذیری هیلبرت و برنی [۷] می‌باشد، بهترین نتیجه ممکن را به زبان کلاس‌های عمومی که در قضیه ۲.۳.۲ مورد بررسی قرارگرفته اند، به دست می‌دهد.

برای دیدن این، تنها کافیست مثالی از کرایسل برای منطق روی $\boldsymbol{PA}$ در نظر گرفته شود. در اینجا یک برهان در «$\boldsymbol{PA}$ =حساب پئانو» به صورت برهانی در $\boldsymbol{PA}^*$ پذیرفته است تنها به شرطی که اضافه کردن فرمول آخر آن به مجموعه قضایای $\boldsymbol{PA}$ با برهان‌های کوتاه‌تر بر حسب عدد گودلی‌شان منجر به ناسازگاری فقط در در منطق گزاره‌ای نمی‌شود. فرض می‌کنیم $\mathsf{prov}_T(x, y)$ فرمول معمول مورد استفاده برای بیان این باشد که x (عدد گودلی) یک برهان از (فرمولی با عدد گودلی) y در حساب پئانوی $\boldsymbol{PA}$ باشد، و همچنین فرض می‌کنیم $\mathsf{prop}(y, z)$ بیانگر این باشد که y معادل گزاره‌ای با $\neg z$ باشد. شرط $\mathsf{proof}_T^*(x, y)$ که x یک برهان y در $\boldsymbol{PA}^*$ است با این فرمول بیان می‌شود:

$$\mathsf{proof}_T(x, y) \wedge (\forall u < x)(\forall z)\big(\mathsf{prop}(y, z) \longrightarrow \neg\mathsf{proof}_T(u, z)\big)$$

و شرط $\mathsf{prov}_T^*(y)$ که y اثبات‌پذیر در $\boldsymbol{PA}^*$ است را به صورت $(\exists x)\mathsf{proof}_T^*(x, y)$ در نظر می‌گیریم. از آن جا که هیچ ناسازگاری از هیچ نوعی در $\boldsymbol{PA}$ وجود ندارد، به طور واضح $\boldsymbol{PA}^*$ و $\boldsymbol{PA}$ قضایای یکسانی دارند، در حقیقت برهان‌های یکسانی دارند. پس همه‌ی مفروضات بخش (۲.۲) و شرط (۱) قضیه ۲.۳.۲ توسط $\boldsymbol{PA}^*$ برآورده می‌شوند، جایی که $\mathsf{prov}_T(x)$ به عنوان

محمول اثبات‌پذیری $\boldsymbol{PA}^*$ (نه $\boldsymbol{PA}$)، در نظر گرفته می‌شود. با این‌حال از آن‌جا که ناسازگاری و تناقض در $\boldsymbol{PA}^*$ وجود ندارد، جمله‌ی سازگاری $\mathsf{con}^*(T) \equiv \neg\mathsf{prov}^*_T(\bot)$ (ساخته شده از این $\mathsf{prov}_T(x)$) اثبات‌پذیر است. پس به وضوح شرط (۲) برای $\boldsymbol{PA}^*$ برآورده نمی‌شود، و از این روست که یک شرط کلی مورد نیاز است.

۴.۲ نتایج اصلی

در سیستم‌های بدون سور، فرمول $\mathsf{prov}_T(x)$ بیانگر اثبات‌پذیری است که به سادگی قابل دسترسی نیست. بنابراین شرط قضیه‌ی ۲.۳.۲ مناسب نیست، و اگر صرفاً نتیجه را در مورد بخش بدون سور از منطق T بخواهیم، به روشنی این شرط برای قضیه باید با حساسیت بیشتری از قضیه‌ی ۲.۳.۲ تعبیر شود. در این بخش، نتیجه‌ای برای بخش بدون سور منطق ارایه می‌دهیم، که امکان کنترل روی شکل عبارت سازگاری که از لحاظ فرمول بدون متغیر بیان می‌شود را فراهم می‌کند. تعریف رمزنگاری در بخش (۲.۲) را یادآوری می‌کنیم. کلاس $\mathcal{E}$ از فرمول‌ها شامل تمام ترکیبات گزاره‌ای فرمولی است که به هر شکل بدون سور از رمزنگاری هر ترم یا شبه‌ترم بسته فراخوانده می‌شود. در نظریه‌های بدون سور، مفهوم یک شبه‌ترم بی‌معنی است، فقط ترم‌ها وجود دارند. به $\mathrm{F}-$لیست فرض‌ها موارد زیر را اضافه می‌کنیم:

(F۳) تابع $\mathsf{sb} \in F$ چنان وجود دارد که، برای همه‌ی $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{E}$ و شبه‌ترم‌های بسته t، $\mathsf{sb}(\bar{\varphi}, t)$ برابر است با: $\ulcorner\varphi(t)\urcorner$.

(F۴) تابع $h \in F$ چنان وجود دارد که $h(\bar{\alpha}) = 0$ دقیقاً اگر $\alpha \in \mathcal{E}$ (در اینجا 0 ثابتی از L است).

فرض (F۴) صرفاً لازم است تا بیانگر شکل عبارت سازگاری را که باید استفاده کنیم باشد.

مفروضات (T۱)-(T۳) را روی نظریه T هرچند فقط برای توابع دومتغیره و فرمول $\alpha \in \mathcal{E}$ در نظر می‌گیریم. بااین حال، فرض می‌کنیم t در (R۲) هر شبه‌ترمی باشد.

همچنین، تحت (T۳) اضافه می‌کنیم که T باید (برای α، β فرمول عددی) تحت اعمال قانون زیر بسته باشد:

$$\frac{\alpha}{\beta \longrightarrow \alpha}. \qquad (\mathrm{R}۵)$$

فرض فوق و فرض قضیه‌ی ۱.۴.۲ زیر توسط بعضی سیستم‌های بدون سور بعنوان مثال حساب بازگشتی مقدماتی، برآورده می‌شوند.

قضیه ۱.۴.۲. *فرض کنید* $\mathsf{proof}_T \in F$ *چنان باشد که*

$$(\exists\alpha)\big(\mathsf{proof}_T(\bar{\alpha},\bar{\beta})=0\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \vdash \beta$$

و $\mathsf{con}(T)$ *را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\neg\Big(h(u)=0 \wedge \mathsf{proof}_T(v,\mathsf{sb}(u,z))=0 \wedge \mathsf{proof}_T\Big(w,\mathsf{sb}\big(\mathsf{neg}(u),z\big)\Big)=0\Big).$$

و همچنین فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) *تابعی مانند* $c \in \boldsymbol{F}$ *چنان وجود دارد که اگر* $\mathsf{proof}_T(\bar{\alpha},\ulcorner\varphi(v)\urcorner)=0$ *که در آن* v *یک متغیر آزاد و* t *یک شبه‌ترم بسته است، آنگاه* $\mathsf{proof}_T\big(c(\bar{\alpha},\bar{t}),\ulcorner\varphi(t)\urcorner\big)=0$ *برقرار است.*

(۲) *برای هر* $\rho(z)\in\mathcal{E}$، $L\in\boldsymbol{F}$ *چنان وجود دارد که*

$$\vdash \rho(z)\longrightarrow \mathsf{proof}_T\big(L(z),\mathsf{sb}(\bar{\rho},z)\big)=0.$$

پس اگر T *سازگار باشد،* $\mathsf{con}(T)$ *در* T *اثبات‌پذیر نیست.*

برهان. لم ۱.۳.۲ را روی فرمول $\psi(x)=$ "$\neg\mathsf{proof}_T\big(c(z,z),\mathsf{sb}(x,z)\big)=0$" اعمال کرده و φ و t را که در لم داده شده را در نظر می‌گیریم، به طوری که $\varphi(z)$ برابر است با:

$$\neg\Big(\mathsf{proof}_T\big(c(z,z),\mathsf{sb}(t,z)\big)=0\Big)$$

و $\rho(z)$ را $\varphi(z)$ بدون علامت نفی ($\neg$) در نظر می‌گیریم.

از آنجا که لم ۱.۳.۲ نتیجه می‌دهد $\vdash t=\bar{\varphi}$ و $\vdash \mathsf{neg}(\bar{\rho})=\bar{\varphi}$، با دوبار استفاده از (T۲) و یک بار استفاده از (R۱) تحت (T۳) به دست می‌آوریم:

$$\vdash \rho(z)\longrightarrow \mathsf{proof}_T\Big(c\big(z,z\big),\mathsf{sb}\big(\mathsf{neg}(\bar{\rho}),z\big)\Big)=0.$$

با این حال با فرض (۲) داریم:

$$\vdash \rho(z)\longrightarrow \mathsf{proof}_T\big(L(z),\mathsf{sb}(\bar{\rho},z)\big)=0$$

و از این رو، پس از ترکیب این دو نتیجه اخیر و با استفاده از $h(\bar{\rho}) = 0$ از (T۱) به علاوه (R۵) و سپس با دوبار استفاده از (R۳) به دست می‌آوریم:

$$\vdash \rho(z) \longrightarrow \mathsf{proof}_T\Big(c\big(z,z\big), \mathsf{sb}\big(\mathsf{neg}(\bar{\rho}), z\big)\Big) = 0 \quad \wedge \tag{۱.۲}$$

$$\mathsf{proof}_T\big(L(z), \mathsf{sb}(\bar{\rho}, z)\big) = 0 \quad \wedge$$

$$.h(\bar{\rho}) = 0$$

حال فرض می‌کنیم $\vdash \mathsf{con}(T)$. پس سه بار استفاده از قانون (R۲) تحت (T۲) نتیجه می‌دهد که

$$\vdash \neg\Big(h(\bar{\rho}) = 0 \quad \wedge$$

$$\mathsf{proof}_T\big(L(z), \mathsf{sb}(\bar{\rho}, z)\big) = 0 \quad \wedge$$

$$.\mathsf{proof}_T\Big(c\big(z,z\big), \mathsf{sb}\big(\mathsf{neg}(\bar{\rho}), z\big)\Big) = 0\Big)$$

اگر این نتیجه را با نتیجه‌ی (۱.۲) ترکیب کنیم، و از (R۴) تحت (T۳) استفاده کنیم، به دست می‌آوریم: $\vdash \neg\rho(z)$. α را طوری در نظر می‌گیریم که $\mathsf{proof}_T\big(\bar{\alpha}, \ulcorner\neg\rho(z)\urcorner\big) = 0$.
سپس توسط (۱)، به همراه (T۱) داریم

$$.\vdash \mathsf{proof}_T\big(c(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}), \ulcorner\neg\rho(\alpha)\urcorner\big) = 0$$

از طرف دیگر، از آنجا که $\vdash \neg\rho(z)$، تعریف $\rho(z)$ نشان می‌دهد که

$$.\vdash \neg\mathsf{proof}_T\big(c(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}), \mathsf{sb}(t, \bar{\alpha})\big) = 0$$

این دو نتیجه‌ی اخیر، به همراه $\vdash \mathsf{sb}(t, \bar{\alpha})) = \ulcorner\neg\rho(\alpha)\urcorner$ نشان می‌دهند که T ناسازگار است، و این یک تناقض است. $\boxtimes$

تذکر ۲.۴.۲. فرض می‌کنیم $\mathsf{cl} \in \mathbf{F}$ به طوری که $\mathsf{cl}(\bar{\alpha}) = 0$، واضحاً اگر $\bar{\alpha}$ یک جمله باشد. بهترین گزینه برای سازگاری، در نظریه هیلبرت

$$\neg\Big(\mathsf{cl}(u) \wedge \mathsf{proof}_T(v,u) = 0 \wedge \mathsf{proof}_T\big(w, \mathsf{neg}(u)\big) = 0\Big)$$

است. با این حال اگر فرمول $\mathsf{sb}(x,y) = z$ بیان‌گر عمل جایگزینی انتخاب شده در روش معمول باشد، خواهیم داشت:

$$\vdash \mathsf{cl}\big(\mathsf{sb}(\vdash \bar{\rho}, z)\big) = 0.$$

بنابراین در منطق معمول، اگر سازگاری طبیعی اثبات‌پذیر باشد، سازگاری con از قضیه‌ی ۱.۴.۲ اثبات‌پذیر خواهد بود.

تذکر ۳.۴.۲. بازهم بهترین نتیجه ممکن را داریم. برای دیدن این‌که فرض (۲) به طور کلی مورد نیاز است، تنها به بخش متغیر آزاد $\boldsymbol{PA}^*$ نیاز داریم، که به روشنی برای فرض (۱) برقرار است (برای $\boldsymbol{PA}^*$، تذکر ۴.۳.۲ از بخش ۳.۲ را ببینید). به علاوه، فرض (۲) به تنهایی کافی نیست.

تذکر ۴.۴.۲. به راحتی می‌توان برهان قضیه‌ی ۱.۴.۲ را برای به دست آوردن همان نتیجه تطبیق داد اگر فرض (۲) با

$$\vdash \rho(z) \longrightarrow \mathsf{prov}_T\big(\mathsf{sb}(\bar{\rho}, z)\big)$$

جایگزین شده باشد و نتیجه بر حسب اثبات‌پذیری ($\mathsf{prov}_T(x)$) به جای برهان ($\mathsf{proof}_T(x,y)$) بیان شده باشد. به ویژه، باید حداقل یکی از شرایط اثبات‌پذیری هیلبرت- برنی برای $\boldsymbol{PA}^*$ نادرست باشد. آیا می‌توان نشان داد که کدام شرط اثبات‌پذیری را می‌توان رد کرد؟ به طور بدیهی شرط سوم اثبات‌پذیری باید نادرست باشد، چون که بقیه شرط‌ها برای تضمین اثبات‌ناپذیری con لازم نیستند.

۵.۲ نگاهی به سازگاری

حال نسخه سوم و آخر قضیه‌ی سازگاری را ارایه می‌دهیم. «فرض‌های پس زمینه» کلی همان‌ها هستند که در بخش ۴.۲ ارایه شده‌اند، غیر از آنکه تحت (T۳) قوانین (R۳)، (R۴) و (R۵) حذف و به جای آنها قانون

$$\frac{\neg\neg\alpha \longrightarrow \beta, \gamma, \neg(\gamma \wedge \alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha} \qquad \text{(R۶)}$$

جایگزین می‌شود، که در آن تمام فرمول‌های موجود در $\mathcal{E}$ هستند. این تغییر (R۶) صرفاً با انگیزه راحتی در اثبات قضیه‌ی زیر است. در واقع، به راحتی می‌توان دید که قوانین دیگر هم برقرارند.

قضیه ۱.۵.۲. *فرض می‌کنیم* $\mathsf{proof}_T \in \mathbf{F}$ *چنان باشد که*

$$(\exists\alpha)\big(\mathsf{proof}_T(\bar{\alpha}, \beta) = 0\big) \quad \longleftrightarrow \quad \vdash \beta$$

و con' *را به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$.\neg\Big(h(u) = 0 \wedge \mathsf{proof}_T(v, u) = 0 \wedge \mathsf{proof}_T\Big(w, \mathsf{sb}\big(\mathsf{neg}(u), z\big)\Big) = 0\Big)$$

فرض می‌کنیم که برای همه‌ی فرمول‌های $\rho(z) \in \mathcal{E}$*، تابع* $L \in \mathbf{F}$ *چنان وجود دارد که*

$$.\vdash \rho(z) \longrightarrow \mathsf{proof}_T\big(L(z), \mathsf{sb}(\bar{\rho}, z)\big) = 0$$

اگر T *سازگار باشد،* con' *اثبات‌پذیر نیست.*

برهان. لم ۱.۳.۲ را روی فرمول $\psi(x) = $ “$\neg\mathsf{proof}_T(z, x) = 0$” اعمال کرده و φ و t داده شده در همان لم را در نظر می‌گیریم. طبق شرط اصلی قضیه‌ی ۱.۵.۲ (یعنی شرط سوم اثبات‌پذیری) اعمال شده روی $\neg\varphi(z)$ به عنوان $\rho(z)$، خواهیم داشت

$$.\vdash \neg\neg\mathsf{proof}_T(z, t) = 0 \longrightarrow \mathsf{proof}_T\big(L(z), \mathsf{sb}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, z)\big) = 0$$

از آنجا که طبق (T۱) $\vdash t = \bar{\varphi}$، (T۲) نتیجه می‌دهد

$$.\vdash \neg\neg\mathsf{proof}_T(z, \bar{\varphi}) = 0 \longrightarrow \mathsf{proof}_T\big(L(z), \mathsf{sb}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, z)\big) = 0$$

توجه کنید طبق (T۱) همچنین داریم $\vdash h(\bar{\varphi}) = 0$.

حال فرض می‌کنیم $\vdash \mathsf{con}'$. طبق (R۲) از (T۳) نتیجه می‌گیریم

$$.\vdash \neg\Big(h(\bar{\varphi}) = 0 \quad \wedge \quad \mathsf{proof}_T(z, \bar{\varphi}) = 0 \quad \wedge \quad \mathsf{sb}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, z)) = 0\Big)$$

اگر سه نتیجه‌ی اخیر را ترکیب کرده و (R۶) را اعمال کنیم به دست می‌آوریم

$$\vdash \neg \mathsf{proof}_T(z, \bar{\varphi}) = 0.$$

با استفاده از (T۲) فوراً $\vdash \neg \mathsf{proof}_T(z, t) = 0$ را نتیجه می‌گیریم، یعنی $\vdash \varphi(z)$. حال α را چنان در نظر می‌گیریم که $\mathsf{proof}_T(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) = 0$. بنابراین طبق (T۱) $\vdash \mathsf{proof}_T(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) = 0$. اما از آنجا که $\vdash \neg \mathsf{proof}_T(z, \bar{\varphi}) = 0$، (R۲) نشان می‌دهد $\vdash \neg \mathsf{proof}_T(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) = 0$. بنابراین T ناسازگار می‌شود، که یک تناقض است. $\boxtimes$

تذکر ۲.۵.۲. فرمول con' سازگاری را به صورت زیر بیان می‌کند: اگر یک فرمول عددی $\varphi(x)$ اثبات‌پذیر باشد، آنگاه برای هیچ ترم tای $\neg\varphi(t)$ اثبات‌پذیر نیست، مگر در مواردی که T بتواند ثابت کند تحت جایگزینی برای ترم‌های ضروری بسته است.

فصل ۳

دو برهان دیگر برای قضیه‌ی دوم ناتمامیت

برهان زیر از آنِ یخ [۹] است:

قضیه ۳.۰.۳. *وجود یک مدل برای نظریه مجموعه‌ها، در نظریه فوق اثبات‌پذیر نیست، مگر اینکه نظریه فوق سازگار باشد.*

برهان. فرض می‌کنیم که نظریه مجموعه‌ها سازگار است و ثابت می‌کند که یک مدل برای نظریه مجموعه‌ها وجود دارد. همچنین فرض می‌کنیم Σ یک مجموعه‌ی متناهی از اصول به اندازه کافی قوی و قادر به فرمول بندی مفاهیم «مدل» و «ارضا شدن» باشد و وجود مدلی از نظریه مجموعه‌ها را ثابت کند. برای ادامه‌ی برهان منظور از یک مدل، مدلی از Σ است که آن‌ها را با M و N نشان می‌دهیم. اگر m یک مجموعه با رابطه دودویی باشد، $\in^m$ آن رابطه را مشخص می‌کند. اگر

$$N \models (\text{یک رابطه است } E)،$$

آنگاه E^* رابطه‌ای است شامل همه‌ی جفت‌های (x, y) به طوری که $N \models xEy$. اگر M و N مدل‌هایی که تعریف کردیم باشند،

$$M < N \text{ اگر یک } m \in N \text{ موجود باشد به طوری که } (\in^m)^* = \in^M.$$

(اساساً، $M < N$ به این معنی است که M مدل درونی در N است یا M در N تعریف‌پذیر است.)
اگر $M < N$ آنگاه برای هر جمله‌ی σ داریم

$$M \models \sigma \qquad \text{اگر و فقط اگر} \qquad N \models (m \models \sigma). \tag{۱.۳}$$

به ویژه، $N \models$ (یک مدل است m). همچنین، اگر $N \models$ (یک مدل است m)، آنگاه $(\in^m)^*$، $\in$ــ رابطه از یک مدل $M < N$ است. این نتیجه می‌دهد که

$$\text{اگر} \quad M_1 < M_2 \quad \text{و} \quad M_2 < M_3 \quad \text{آنگاه} \quad M_1 < M_3. \tag{۲.۳}$$

رمزنگاری‌های ثابتی را از فرمول‌های عددی (رمزنگاری گودلی) در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم S_n نام nــ امین مجموعه‌ی تعریف‌پذیر از اعداد باشد.

تعریف ۴.۰.۳. S مجموعه‌ی همه‌ی اعداد n است با این ویژگی که یک مدل M وجود دارد به طوری که

$$M \models n \notin S_n.$$

فرض می‌کنیم k عدد گودلی S و A جمله‌ی «$k \in S$» باشد. آنگاه هم ارزی زیر در Σ اثبات‌پذیر است:

$$A \longleftrightarrow \exists M(M \models \neg A). \tag{۳.۳}$$

طبق (۱.۳) اگر M یک مدل باشد آنگاه

$$M \models A \longleftrightarrow \exists N < M(N \models \neg A). \tag{۴.۳}$$

می‌گوییم M مثبت است اگر $M \models A$ و در غیر اینصورت منفی است. به عنوان نتیجه‌ای از (۴.۳)، اگر M منفی باشد آنگاه همه‌ی $N < M$ها مثبت هستند. از آنجا که Σ سازگار است و ثابت می‌کند که مدلی وجود دارد، داریم

(۵.۳) یک مدل وجود دارد.

و همچنین با استفاده از (۱.۳)

(۶.۳) برای هر مدل M یک مدل $N < M$ وجود دارد.

برای رسیدن به تناقض، فرض می‌کنیم M_1 طبق (۵.۳) یک مدل باشد. اگر M_1 مثبت باشد، طبق (۴.۳)، یک مدل منفی $M_2 < M_1$ وجو دارد، در غیر اینصورت قرار می‌دهیم $M_2 = M_1$. طبق (۶.۳) یک مدل $M_3 < M_2$ وجود دارد، و از آنجا که M_2 منفی است، M_3 مثبت است. طبق (۴.۳) یک مدل منفی $M_4 < M_3$ وجود دارد، و داریم $M_4 < M_2$ از (۲.۳) به تناقض می‌رسیم.

تذکر ۳.۰.۵. جمله‌ی A در (۳.۳) تناظر گودلی «من اثبات‌پذیر نیستم» است. روشی دیگر برای به دست آوردن A به این صورت است: یک ویژگی فرمولی از زبان نظریه مجموعه‌ها با یک متغیر آزاد است. فرض می‌کنیم p ویژگی (از بین همه‌ی ویژگی‌های q) $\exists M : M \models \neg q(q)$ باشد، و قرار می‌دهیم $A = p(p)$. پس (۳.۳) برقرار است.

تذکر ۳.۰.۶. هرچند که اثبات ما از قضیه‌ی گودل از قضیه‌ی تمامیت استفاده می‌کند، با این حال می‌تواند طوری اصلاح شود که روی نظریه‌های ضعیف‌تری مثل حساب پئانو ($\boldsymbol{PA}$) نیز اعمال شود. برای اثبات اینکه $\boldsymbol{PA}$ سازگاری خودش را ثابت نمی‌کند (مگر اینکه ناسازگار باشد)، استدلال زیر را داریم:

فرض می‌شود که $\boldsymbol{PA}$ سازگار است و اینکه «$\boldsymbol{PA}$ سازگار است» در $\boldsymbol{PA}$ اثبات‌پذیراست. علاوه براین

$$\boldsymbol{PA} \vdash (\text{Γ یک تعمیم محافظه کارانه از $\boldsymbol{PA}$ است}).$$

بنابراین

$$\Gamma \vdash (\text{Γ یک تعمیم محافظه کارانه از یک نظریه سازگار است})،$$

پس سازگاری خودش را ثابت می‌کند. در نتیجه، Γ ثابت می‌کند که Γ یک مدل دارد. حال فرض می‌کنیم Σ یک زیرمجموعه‌ی متناهی به اندازه کافی قوی از Γ باشد که ثابت می‌کند Σ یک مدل دارد؛ برهان فوق به تناقض منجر می‌شود.

۳.۱ خودنامصداقی و ناتمامیت

در این بخش برهانی از قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل با به کارگیری پارادوکس گِرِلینگ از عبارت خودنامصداقی ارایه می‌دهیم. برای یک نظریه T شامل ZF، جمله‌ی HET_T را تعریف می‌کنیم که مستقیماً بیان می‌کند عبارت «خودنامصداقی» خودش نامصداق است. نشان می‌دهیم این جمله از T نتیجه نمی‌شود و معادل (اثبات‌پذیری در T) با سازگاری T است. در نهایت نشان می‌دهیم چگونه برهان ناتمامیت مشابهی برای حساب پئانو بسازیم.

هدف از این قسمت ارایه‌ی برهان معنایی مطمئنی از قضیه‌ی ناتمامیت گودل است. درواقع، برهان در چهارچوب مشابهی از [۱۵] انجام خواهد شد. با این حال در اینجا قصد داریم به جای پارادوکس بری ، کوچکترین عدد تعریف ناپذیر توسط n کلمه (یا با هر فرمول کمتر از n) از پارادوکس گِرلینگ (عبارات خودنامصداق) استفاده کنیم.

۱.۱.۳ پارادوکس گرلینگ

متناقض‌نمای گرلینگ می‌تواند از روش زیر به دست آید:
یک گزاره‌ی «خودنامصداق» (یک موضعی) در نظر بگیرید که به خودی خود درست نباشد (برای مثال «طولانی» خودنامصداق است، چون خود یک عبارت طولانی نیست). اما راجع به محمولی که تعریف کردیم، چه باید گفت؟ آیا «خودنامصداق»، خودنامصداق است؟ با استدلالی ساده به تناقض می‌رسیم. اگر خودنامصداق، خودنامصداق باشد، نیست و اگر خودنامصداق نباشد، هست.

۲.۳ ناتمامیت نظریه مجموعه‌ها

تعریف ۱.۲.۳. هر زوج $M = (|M|, R)$ به طوری که $R \subseteq |M|^2$ باشد را یک «مدل» می‌نامیم. به جای R، خواهیم نوشت «$\in_M$»، چون برآنیم R را به عنوان تعبیر ممکنی از «$\in$» بررسی کنیم.

تعریف ۲.۲.۳. M زیرمدلی از N است اگروتنهااگر $|N| \subseteq |M|$ و $\in_M = \in_N \cap |M|^2$.

تعریف ۳.۲.۳. M یک زیرمدل متعدی از N است اگروتنهااگر M زیرمدلی از N باشد و برای هر a و b، اگر $a \in |M|$، $b \in |N|$ و $N \models b \in a$، آنگاه $b \in |M|$.

فرض می‌کنیم T نظریه‌ای در زبان ZF شامل ZF باشد. این یک حقیقت به خوبی شناخته شده است که می‌توان فرمول‌ها را با مجموعه‌های متناهی، یعنی اعضای V_w تشخیص داد (برای مثال هر مجموعه‌ی مجزای متعلق به V_w را که یک نقش از نمادهای زبان ما را ایفا می‌کند انتخاب می‌کنیم و سپس فرمول‌ها را به صورت $n-$تایی‌های مشخص از این نمادها تعریف می‌کنیم).

لم ۴.۲.۳. *برای هر مدل M از T، یک مدل M_1 یکریخت با M وجود دارد به طوری که $(V_w, \in)$ یک زیرمدل متعدی از M_1 باشد.*

برای اثبات، به عنوان مثال [۱۵] را ببینید. از نظر لم ۴.۲.۳، از این پس روی مدل‌هایی که در آن‌ها رابطه‌ی $\in$ محدود به V_w شده است بحث می‌کنیم، یعنی برای هر $x, y \in V_w$،

$$x \in_{M_1} y \qquad \text{اگروتنهااگر} \qquad x \in y.$$

به ویژه همه‌ی فرمول‌های زبان T متعلق به این مدل‌هاست. علامت $\ulcorner\varphi\urcorner$ برای این منظور استفاده می‌شود که فرمول وابسته را به عنوان یک عضو از مدل داده شده بررسی کنیم.
حال، فرض می‌کنیم M یک مدل باشد و N را مدل درونی آن قرار می‌دهیم (به زبان عامیانه، N یک مدل است اگر به آن از درون M بنگریم، اما در واقعیت شاید یک مدل نباشد). این حالت را با بیان $N = (|N|^M, (\in_N)^M)^M$ توصیف می‌کنیم، به معنی این که همه‌ی مفاهیم مربوط باید مطابق با M در نظر گرفته شوند (به عنوان مثال $\{x\}^M$ حالتی است که فقط x رابطه‌ی $\in_M$ را در آن ارضا می‌کند؛ نماد $(x, y)^M$ باید به روشی مشابه تعبیر شود). در هر حال بهتر است از N در سطحی مشابه با M صحبت کنیم (یعنی بدون «داخل شدن» در M). بنابراین نقطه‌ی مقابل آن را تعریف می‌کنیم، یک مدل N^* «برگرفته» از M که در روشی یکسان با توجه به فرمول‌های حقیقی رفتار می‌کند، همان طور که N با توجه به فرمول‌های بسیار در M رفتار می‌کند.

تعریف ۵.۲.۳. قرار دهید:

(i) $|N^*| = \{a \in |M| : M \models a \in |N|^M\}$؛

(ii) $\in_{N^*} = \{(a, b) \in |N^*|^2 : M \models \text{“}N \models a \in b\text{”}\}$؛

(iii) $N^* = (|N^*|, \in_{N^*})$.

علامت نقل قول به این معنی است که مکان مربوط باید به وسیله‌ی یک فرمول مناسب از نظریه‌ی مجموعه‌ها با پارامترهای a, b پر شود. به خصوص «$N \models a \in b$» یعنی

$$\big((a, b)^M, (\in_N)^M\big) \in \quad \in_M.$$

لم ۶.۲.۳. *فرض کنید $\varphi(a_1, \ldots, a_k)$ فرمول با پارامترها در N^* باشد. آنگاه*

$$N^* \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \qquad \text{اگروتنهاگر} \qquad M \models \text{“}N \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)\text{”}.$$

برهان با استقرا روی پیچیدگی φ می‌باشد.

حال قادریم برخی ویژگی‌های اضافی از مدل‌هایی که وجودشان توسط لم ۶.۲.۳ تضمین شده را شرح دهیم. یک مجموعه یک ω^M نامیده می‌شود (یا ω مطابق با M) اگروتنهااگر

$$M \models \text{“}a = \omega\text{”}؛$$

به همان روش می‌توانیم از مجموعه‌های $(V_n)^M$، $(V_\omega)^M$ و Form^M (مجموعه فرمول‌های مطابق با M) صحبت کنیم. آنگاه داریم:

(i) ω یک بخش اصلی از ω^M است، برگرفته از خارج M.

(ii) برای هر $n \in \omega$، $V_n = (V_n)^M$، فرض می‌کنیم این آخرین مجموعه را خارج از M در نظر گرفته‌ایم. با این حال از $V_\omega = (V_\omega)^M$ نتیجه نمی‌شود، چون ω^M می‌تواند شامل اعداد غیراستاندارد باشد.

(iii) برای هر فرمول φ، φ متعلق به Form^M است که خارج از M در نظر گرفته شده است.

حال نظریه T را در نظر می‌گیریم. جدا از دربر داشتن ZF، T باید همچنین شرط دیگری را ارضا کند: باید اصل‌پذیر باشد. به عبارت دیگر، مجموعه قضایای T باید شمارای بازگشتی باشد.

تعریف ۷.۲.۳. T اصل‌پذیر است اگروتنهااگر $\varphi(x)$ موجود باشد که $\varphi(x)$ فرمول مطلق با یک متغیر آزاد و بدون پارامتر باشد و

$$T = \left\{a \in \mathsf{sent} : (V_\omega) \models \varphi(a)\right\}،$$

که sent مجموعه‌ی جملات است.

در بحث قضیه‌ی دوم ناتمامیت، قصد داریم راجع به مدل‌هایی از T صحبت کنیم که خودشان شامل مدل‌هایی از T هستند. اما این فرمول‌بندی نیازمند اصلاح است: چیزی که در واقع نیاز داریم یک مدل درونی است (یعنی مشمول در M) از یک نظریه T است که در دامنه‌ی M ساخته شده باشد.

بنابراین برای مثال وقتی می‌نویسیم $M \models$ "$N \models T$"، به این معناست که برای یک فرمول مشخصه‌ی T بر حسب تعریف ۷.۲.۳ داریم:

$$M \models \text{“}\forall x \in \mathsf{sent}[(V_\omega, \in) \models \varphi(x) \Rightarrow N \models x]\text{”}. \qquad (۷.۳)$$

حال N^* را مدلی که با بیرون آوردن یک مدل N خارج از M به دست آمده در نظر می‌گیریم. آنگاه داریم:

لم ۸.۲.۳. *اگر* $M \models$ "$N \models T$"*، آنگاه* $N^* \models T$.

برهان. این لم با استفاده از این واقعیت که برای یک فرمول نظریه مجموعه‌ها، مانند

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

(که در آن از پارامترهای M استفاده نشده باشد) و $a_1, \dots, a_n \in V_\omega$.

اگر $(V_\omega, \in) \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$، آنگاه $M \models$ "$(V_\omega, \in) \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$" ثابت می‌شود. خود این واقعیت می‌تواند با استقرا روی پیچیدگی یک فرمول φ ثابت شود. ⊠

تعریف ۹.۲.۳. $M_1 < M_2$ اگروتنهااگر M_3 وجود داشته باشد به طوری که از M_2 برگرفته شده و با M_1 یکریخت باشد.

لم ۱۰.۲.۳. *برای هر* M_1, M_2, M_3*، اگر* $M_1 < M_2$ *و* $M_2 < M_3$*، آنگاه* $M_1 < M_3$.

برهان. برهان بر پایه‌ی این دو مطلب است:

۱. اگر در دامنه‌ی M_3، M_1^* مدلی از نقطه نظر M_2^* باشد (یعنی اگر داشته باشیم

($M_3 \models$ "$M_2^* \models$ یک مدل است M_1^*")،

آنگاه بازهم در دامنه‌ی M_3 می‌توانیم M_1^* را از M_2^* برداریم و بعد یکبار دیگر می‌توانیم آن را از M_3 برداریم. با این روش یک مدل «واقعی» M_1 به دست می‌آوریم. حال نکته این است که اگر در ابتدا M_2^* را از M_3 برمی‌داشتیم، چون در آن صورت بازهم M_1 در M_2^* تعریف‌پذیر بود پس می‌توانستیم M_1^* را مستقیماً از M_2 برداریم و بازهم یک مدل «واقعی» M_1 به دست می‌آمد.

۲. اگر M_1 با M_2 یکریخت باشد و M_3 مدلی باشد که از M_1 برداشته شده، آنگاه یک مدل M_4 برداشته شده از M_2 وجود دارد به طوری که M_4 با M_3 یکریخت است. ☒

تعریف ۱۱.۲.۳. فرض می‌کنیم φ فرمول مشخصه‌ی T باشد. آنگاه $\mathsf{con}(T)$ جمله‌ی زیر است: مدل M وجود دارد به طوری که برای هر ψ اگر $\psi \in \mathsf{sent}$ و $(V_\omega, \in) \models \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$ آنگاه $M \models \psi$.

حال می‌توانیم قضیه‌ی دوم ناتمامیت را بیان کنیم.

قضیه ۱۲.۲.۳. (*قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل*)
اگر T یک مدل داشته باشد، آنگاه $T + \neg\mathsf{con}(T)$ یک مدل دارد. به عبارت دیگر $T \not\models \mathsf{con}(T)$.

تذکر ۱۳.۲.۳. در فرمول بندی قضیه‌ی دوم ناتمامیت، جمله‌ی $\mathsf{con}(T)$ به صورت نحوی تعبیر می‌شود: «هیچ برهانی برای $\ulcorner 0 = 1 \urcorner$ در T وجود ندارد». این دو نسخه معادلند، به شرطی که یکی از آن‌ها دارای شرایط اثبات‌پذیری ([۱۹] را ببینید) که مشخص کننده‌ی خواص اساسی محمول Prov_T (اثبات‌پذیری در T) است، باشد. بدون شرایط اثبات‌پذیری نسخه‌ی نحوی قضیه‌ی ناتمامیت اساساً ضعیف‌تر از نوع کلاسیک آن خواهد بود.

استدلال منتج به قضیه‌ی ۱۲.۲.۳ را با تعریف محمول «خودنامصداقی»، به اختصار het_T شروع می‌کنیم. سپس جمله‌ی HET_T را که در پارادوکس اصلی عبارت خودنامصداقی، بیانگر جمله‌ی ««خودنامصداقی» خودنامصداق است» معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۴.۲.۳. تعریف می‌کنیم

(آ) $\mathsf{het}_T(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$ اگر یک مدل M از T موجود باشد به طوری که $M \not\models \varphi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$.

(ب) HET_T اگر $\mathsf{het}_T(\ulcorner\mathsf{het}_T(x)\urcorner)$.

در ادامه قصد داریم دو گزاره‌ای را که به اتفاق هم قضیه‌ی دوم ناتمامیت را نتیجه می‌دهند، اثبات کنیم.

گزاره ۱۵.۲.۳. $T \models \mathsf{con}(T) \equiv \mathsf{HET}_T$.

گزاره ۱۶.۲.۳. *اگر T یک مدل داشته باشد، آنگاه $T \not\models \mathsf{HET}_T$.*

برهان گزاره‌ی اول:

قرار می‌دهیم $M \vDash T$ و $M \vDash \mathsf{con}(T)$. همچنین فرض می‌کنیم که $M \vDash \neg\mathsf{HET}_T$. طبق تعریف HET_T به این نتیجه می‌رسیم

$$M \vDash \forall N[\text{“}N \vDash T\text{”} \Rightarrow \text{“}N \vDash \mathsf{HET}_T\text{”}].$$

از آنجا که $M \vDash \mathsf{con}(T)$، مجموعه‌ی N را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $M \vDash \text{“}N \vDash T\text{”}$. آنگاه به وضوح

$$M \vDash \text{“}N \vDash \mathsf{HET}_T\text{”}.$$

طبق تعریف HET_T یک مجموعه‌ی S وجود دارد به طوری که

$$M \vDash \text{“}N \vDash \text{“} \vDash T\text{””} \quad \text{و}$$

$$M \vDash \text{“}N \vDash \text{“}S \vDash \neg\mathsf{HET}_T\text{””}.$$

سپس با کار درون M می‌توانیم S را از N را برداریم و به دست آوریم:

$$M \vDash \text{“}S \vDash T\text{”} \quad \text{و}$$

$$M \vDash \text{“}S \vDash \neg\mathsf{HET}_T\text{”}.$$

اما این یک تناقض است، زیرا همانطور که قبلاً مشاهده کردیم، هر مدل T درون M باید مدلی از HET_T باشد. اکنون یک طرف اثبات شد و برای طرف دیگر کافیست توجه کنید که وجود یک مدل برای T (با خاصیت اضافی) را نتیجه می‌دهد. ⊠

برهان گزاره‌ی دوم:

فرض کنید T دارای یک مدل M باشد. همچنین فرض کنید $T \vDash \mathsf{HET}_T$، بنابراین $M \vDash \mathsf{HET}_T$. آنگاه یک مدل دیگر N از T در M وجود خواهد داشت که در آن $\neg\mathsf{HET}_T$ درست است. حال آن را از M برمی‌داریم. به دست می‌آوریم $N^* \vDash T$ و $N^* \vDash \neg\mathsf{HET}_T$. به وضوح این در تناقض با فرض $T \vDash \mathsf{HET}_T$ است. ⊠

بنابراین روند اثبات‌های گزاره‌های اول و دوم (۱۵.۲.۳ و ۱۶.۲.۳) را مشاهده کردیم. حال قضیه‌ی ۱۲.۲.۳ به طور بدیهی نتیجه می‌شود: فرض کنید که T یک مدل داشته باشد و $T \vDash \mathsf{con}(T)$. در این حالت طبق گزاره‌ی اول (۱۵.۲.۳) $T \vDash \mathsf{HET}_T$ اما سپس با گزاره‌ی دوم (۱۶.۲.۳) T مدل ندارد و این اثبات را تمام می‌کند.

۳.۳ ناتمامیت حساب پئانو

فرض کنید T یک نظریه اصل‌پذیر، سازگار در زبان حساب شامل $\boldsymbol{PA}$ باشد. به منظور بازسازی فرمول HET_T در حساب، نیازمند راهی برای ایجاد محدودیت روی مدل‌ها هستیم. فرض می‌کنیم $\varphi_T(x)$ یک Δ_0ـ فرمول باشد (یعنی تنها با سورهای کراندار) که در مدل‌های استاندارد معرف مجموعه‌ی اصول T است و $Tr_2(x)$ یک محمول درستی برای Σ_2ـ فرمول‌ها و sent مجموعه‌ی جملات باشد. درون T تعریف زیر از محمول $\mathsf{compl}_T(\Phi)$ را معرفی می‌کنیم که Φ، Σ_2 است:

$$\mathsf{compl}_T(\Phi) \equiv \forall\psi[\psi \in \mathsf{sent} \Rightarrow [Tr_2(\ulcorner\Phi(\psi)\urcorner) \vee Tr_2(\ulcorner\Phi(\neg\psi)\urcorner)]$$

$$\wedge \forall x[\varphi_T(x) \Rightarrow Tr_2(\ulcorner\Phi(x)\urcorner)]$$

$$\wedge \neg\exists d:$$

d] اثباتی از $\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner$ براساس مجموعه فرمول‌های θ است به طوری که $Tr_2(\ulcorner\Phi(\theta)\urcorner)$].

معنی این عبارات این است که Φ یک توسیع سازگار کامل از T را تعریف می‌کند.

ازقضیه‌ی تمامیت حسابی شده (هیلبرت و برنی) استفاده می‌کنیم:

$$T \vdash \mathsf{con}(T) \equiv \exists\Phi\mathsf{compl}_T(\Phi) \tag{HB}$$

این قضیه به ما اجازه می‌دهد جملات نظریه‌ـ مجموعه‌ای خود را درون T دوباره بسازیم.

$$\mathsf{het}_T(x) \equiv \exists\psi[\mathsf{compl}_T(\psi) \wedge Tr_2(\ulcorner\psi(\neg x(x)\urcorner)]$$ و

$$\mathsf{HET}_T \equiv \mathsf{het}_T(\ulcorner\mathsf{het}_T(x)\urcorner).$$

به وضوح گزاره‌ی $\mathsf{con}(T)$ از HET_T نتیجه می‌شود. از طرفی

$$\mathsf{het}_T(x) \equiv \exists\psi[\mathsf{compl}_{T+\neg x(x)}(\psi)]،$$

پس طبق (HB) داریم:

$$\mathsf{het}_T(x) \equiv \mathsf{con}(T + \neg x(x)).$$

به عبارت دیگر

$$\mathsf{het}_T(x) \equiv \neg\mathsf{Prov}_T(\ulcorner x(x)\urcorner).$$

حال می‌توانیم این را در تعریف‌مان از HET_T جایگذاری کنیم. آنگاه به دست می‌آوریم:

$$\mathsf{HET}_T \equiv \neg\mathsf{Prov}_T(\ulcorner \mathsf{het}_T(\mathsf{het}_T(x)\urcorner))،$$

که به این معناست که $\mathsf{HET}_T \equiv \neg\mathsf{Pr}_T(\ulcorner \mathsf{HET}_T \urcorner)$. مثال دیگری از یک جمله که می‌گوید «من اثبات‌پذیر نیستم» به دست آورده‌ایم. بنابراین می‌توانیم به روشی استاندارد همتاهای حسابی گزاره‌های اول و دوم (۱۵.۲.۳ و ۱۶.۲.۳) را اثبات کنیم.

مراجع

[1] J. Bagaria, A Short Guide to Gödel's Second Incompleteness Theorem, *Teorema: Revista Internacional de Filosofía* 22 (2003) 5–15.

[2] G. Boolos, A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem, *Notices of the American Mathematical Soceity* 36 (1989) 388–390.

[3] C. Cieśliński, Heterologicality and Incompleteness, *Mathematical Logic Quarterly* 48 (2002) 105–110.

[4] S. Feferman, Arithmetization of Metamathematics in a General Setting, *Fundamenta Mathematicae* 44 (1960) 35–92.

[5] K. Gödel, ‘‘On Formally Undecidable Propositions Of Principia Mathematica and related Systems. I’’, in: J. Van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, Harvard University Press (1967) pp. 596–616.

[6] P. Hajék and P. Pudlák, *Mathemathematics of First-order Arithmetic*, Springer-Verlag (1993).

[7] D. Hilbert and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik 2*, Springer-Verlag (1968/70).

[8] D. Hilbert, ‘‘On the Infinite’’, in: J. Van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge (1967) pp. 596–616.

[9] T. Jech, On Gödel's Second Incompleteness Theorem, *Proceeding of the American Mathematical Society* 121 (1994) 311–313.

[10] R. Jerleslow, *On Gödel's Consistency Theorem* (1971) Mimeographed.

[11] R. Jerleslow, Redundancies in the Hilbert-Bernays Derivability Conditions for Gödel's Second Incompleteness Theorem, *The Journal of Symbolic Logic* 38 (1973) 359–367.

[12] M, Kikuchi, A Note on Boolos' Proof of the Incompleteness Theorem, *Mathematic Logic Quarterly* 40 (1994) 528–532.

[13] G, Kreisel, ‘‘Mathematical Logic’’, in: T. L. Saaty (ed.), *Lectures on Modern Mathematics* (1965) pp. 95–195.

[14] G, Kreisel, *Topics in Proof Theory*, Lecture notes from Mathematisch Instituutder Rijksuniversiteit, Utrecht, Holland (1971).

[15] J.-L. Krivine, *Théorie Axiomatique des Ensembles,* PUF, Paris (1972).

[16] H. Kotlarski, On The Incompleteness Theorems, *Journal of Symbolic Logic Symbolic Logic* 59 (1994) 1414–1419.

[17] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic,* CRC Press (6th ed. 2015).

[18] S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Springer-Verlag (1999).

[19] C. Smorynski, ‘‘The Incompleteness Theorems’’, in: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland (1977) pp. 821–866.

[20] G. Takeuti, *Proof Theory*, North-Holland (2nd ed. 1987).

[21] P. Vopnka, A New Proof of Gödel’s Results on Non-Provability of Consistency, *Bulletin de l´Académie Polonaise des Sciences* 14 (1966) 111–116.

[۲۲] سید مجید ظهیری، پیامدهای فلسفی قضایای گودل، *پژوهشنامه فلسفه و دین (نامه حکمت)* دوره ۲ شماره ۲ (۱۳۸۳) ۱۳۲—۱۱۷.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اثبات‌پذیری	Provability
اثبات‌ناپذیری	Unprovability
استقراء	Induction
استنتاج	Deduction
اصل	Principle
اصل‌پذیر	Axiomatizable
اصل موضوع	Axiom
بازگشتی	Recursive
اصل‌پذیر به طور بازگشتی ابتدایی	Primitive Recursively Axiomatizable
برهان	Proof
به‌طور اثبات‌پذیر معادل	Provably Equivalent
تمامیت	Completeness
تناقض	Contradiction
توسیع سازگار	Consistent Extention
پارادوکس بری	Berry's Paradox
تعمیم‌یافته	Generalized
پارادوکس گرلینگ	Grelling's Paradox
ثابت	Constant

جایگزینی	Substitution
جمله مستقل	Independent Sentence
حساب	Arithmetic
حساب پئانو	Peano Arithmetic
حکم	Statement
خودارجاعی	Self-Reference
درست	Sound
زبان	Language
سازگار	Consistent
سور	Quantifier
سیستم صوری	Formal System
وجودی	Existential
شرایط اثبات‌پذیری	Derivability Conditions
شمارش‌پذیر	Enumerable
درستی	Truth
صوری	Formal
صوری شده	Formalized
عددگودل	Gödel number
قضایای ناتمامیت گودل	Gödel's Incompleteness Theorems
فرمول	Formula
قطری‌سازی	Diagonalization
کدگذاری	Encoding
کران‌دار	Bounded
متغیر	Variable
متغیر آزاد	Free Variable

متناهی .... Finite
محاسبه‌پذیر .... Computable
محمول .... Predicate
محمول اثبات‌پذیری .... Provability Predicate
مجموعه‌های موروثاً متناهی .... Hereditarily Finite Sets
معنایی .... Semantic
ناتمامیت .... Incompleteness
ناسازگار .... Inconsistent
نتیجه .... Conclusion
نظریه .... Theory
نقیض .... Negation
وضع مقدم .... Modus onensP
هم‌ارز .... Equivalent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

حساب	Arithmetic
اصل موضوع	Axiom
اصل‌پذیر	Axiomatizable
پارادوکس بری	Berry's Paradox
کران‌دار	Bounded
تمامیت	Completeness
محاسبه‌پذیر	Computable
نتیجه	Conclusion
سازگار	Consistent
توسیع سازگار	Consistent Extention
ثابت	Constant
تناقض	Contradiction
استنتاج	Deduction
شرایط اثبات‌پذیری	Derivability Conditions
قطری‌سازی	Diagonalization
کدگذاری	Encoding
شمارش‌پذیر	Enumerable
هم‌ارز	Equivalent

Existential .... وجودی

Finite .... متناهی

Formal .... صوری

Formal System .... سیستم صوری

Formalized .... صوری شده

Formula .... فرمول

Free Variable .... متغیر آزاد

Generalized .... تعمیم‌یافته

Greling's Paradox .... پارادوکس گرلینگ

Gödel number .... عددگودل

Gödel's Incompleteness Theorems .... قضایای ناتمامیت گودل

Hereditarily Finite Sets........ مجموعه‌های موروثاً متناهی

Induction .... استقراء

Incompleteness .... ناتمامیت

Inconsistent .... ناسازگار

Language........ زبان

Negation........ نقیض

Peano Arithmetic .... حساب پئانو

Predicate .... محمول

Primitive Recursive Axiomatizable .... اصل‌پذیر به طور بازگشتی ابتدایی

Principle........ اصل

Proof .... برهان

Provability........ اثبات‌پذیری

Provably Equivalent .... به طور اثبات‌پذیر معادل

Ponens Modus .... وضع مقدم

Quantifier .... سور

Recursive .... بازگشتی

Satisfiable .... صدق‌پذیر

Self-Reference .... خودارجاعی

Semantic .... معنایی

Statement .... حکم

Substitution .... جایگزینی

Theorem .... قضیه

Theory .... نظریه

Truth .... درستی

Undecidablitity .... تصمیم‌ناپذیری

Unprovability .... اثبات‌ناپذیری

Variable .... متغیر

Surname: Khaleghi **Name:** Shiva

Title: Standard Proofs for Gödel's Second Incompleteness Theorem

Supervisor: Dr. Saeed Salehi

Advisor: Dr. Hazhir Homei

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Mathematical Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2017 **Number of Pages:** 53

Keywords: Incompleteness, axioms, Consistency, Diagonalization, Provability, Arithmetic, Heterologicality.

Abstract

This thesis consist of several proofs for Gödel's second incompleteness theorem. In the first chapter a standard proof of this theorem, due to Bagaria [1], is presented. In the second chapter, the derivibility conditions from [4] are investegated. Finally, in the third and last chapter, the proof of Jech [3] and of Cieśliński [2], which is based on Grelling Paradox, are presented.

[1] J. Bagaria, A Short Guide to Gödel's Second Incompleteness Theorem, *Teorema: Revista Internacional de Filosofía* 22 (2003) 5–15.
[2] C. Cieśliński, Heterologicality and Incompleteness, *Mathematical Logic Quarterly* 48 (2002) 105–110.
[3] T. Jech On Gödel's Second Incompleteness Theorem, *Proceeding of the American Mathematical Society* 121 (1994) 311–313.
[4] R. Jerleslow, Redundancies in the Hilbert-Bernays Derivability Conditions for Gödel's Second Incompleteness Theorem, *The Journal of Symbolic Logic* 38 (1973) 359–367.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

Standard Proofs for Gödel's Second Incompleteness Theorem

Supervisor

Dr. Saeed Salehi

Advisor

Dr. Hazhir Homei

By

Shiva Khaleghi

2017